Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2015
23. Juni 2015

Stochastik I - Übungsblatt 11

Abgabe: Dienstag, 30. Juni vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (2 + 3 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Dichte f_θ. Bestimme einen suffizienten Schätzer für $\theta \in \Theta$, falls

(a) $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}_{(\theta,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $\Theta = \mathbb{R}$.

(b) $f_\theta(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log(x)-\mu)^2\right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $(\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times (0,\infty)$.

Aufgabe 2 (3 + 5 + 2 Punkte)

Es sei $(X_1, \dots, X_n)$ eine i.i.d. Zufallsstichprobe, wobei X_1 die Verteilungsfunktion

$$F_{(\alpha,\beta)}(x) = (x/\beta)^\alpha \mathbb{1}_{(0,\beta)}(x) + \mathbb{1}_{[\beta,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

besitzt mit Parametern $\alpha, \beta > 0$.

(a) Zeige, dass durch $\left(\prod_{i=1}^n X_i, X_{(n)}\right)$ ein suffizienter Schätzer für (α, β) gegeben ist.

(b) Bestimme den ML-Schätzer für (α, β) und untersuche ihn auf Suffizienz[1].

(c) Nun soll die Länge von Kuckuckseiern mit der obigen Verteilung modelliert werden. Bestimme den Wert des ML-Schätzers für (α, β) für die Beobachtungen in `kuckuck.dat`.

Aufgabe 3 (2 + 3 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen deren Verteilung P_λ zu einer parametrischen Familie $\{\tilde{P}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ von Verteilungen gehört. Weiterhin sei $\hat{\lambda}(X_1, \dots, X_n)$ ein Schätzer für den Parameter λ. Zeige, dass es sich in folgenden Fällen bei $\hat{\lambda}$ um einen vollständigen Schätzer handelt.

(a) $X_1 \sim Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$, $\hat{\lambda} = \bar{X}_n$.

(b) $X_1 \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}_n$.

Aufgabe 4 (2 + 3 Punkte)

Sei $(X_1, \dots, X_n)$ eine i.i.d. Zufallsstichprobe.

(a) Zeige, dass $\bar{X}_n$ bester erwartungstreuer Schätzer für λ ist, falls $X_1 \sim Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$.

(b) Zeige, dass $\bar{X}_n$ bester erwartungstreuer Schätzer[2] für μ ist, falls $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu > 0$, bei bekanntem $\sigma^2 > 0$.

[1] Bemerkung 3.5.3, 2. aus dem Skript gilt auch allgemeiner für bijektive messbare Abbildungen $g : B_1 \to B_2$, wobei $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^m$ Borel-messbare Mengen sind, falls $P(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \in B_1) = 1$.

[2] Verwende in dieser Aufgabe den Satz von Lehmann-Scheffé (Satz 3.5.4.).