ulm university universität uulm

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2015
2. Juli 2015

# Stochastik I - Übungsblatt 12

Abgabe: Dienstag, 7. Juli vor Beginn der Übung.

**Aufgabe 1** (3 + 3 Punkte)

Es sei $X$ eine integrierbare Zufallsvariable und $Y$ eine beliebige Zufallsvariable auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zeige[1]:

(a) Sind $X$ und $Y$ diskret mit Werten in den (diskreten) Mengen $C_X$ bzw. $C_Y$, so gilt

$$\mathbb{E}(X|Y=y) \overset{\text{f.s.}}{=} \begin{cases} \sum\limits_{x \in C_X} xP(X=x|Y=y) & ; \quad y \in C_Y \\ 0 & ; \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Sind $X$ und $Y$ absolut stetig mit Dichten $f_X$ und $f_Y$ sowie der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y}$, so gilt

$$\mathbb{E}(X|Y=y) \overset{\text{f.s.}}{=} \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}} x\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}dx & ; \quad f_Y(y) > 0 \\ 0 & ; \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

**Aufgabe 2** (2 + 4 Punkte)

(a) Seien $X$ und $Y$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim Poi(\lambda)$, $Y \sim Poi(\mu)$, $\lambda, \mu > 0$. Sei außerdem $Z = X + Y$. Zeige, dass

$$\mathbb{E}(X|Z=k) \overset{\text{f.s.}}{=} \begin{cases} k\frac{\lambda}{\lambda+\mu} & ; \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & ; \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Seien nun $X$ und $Y$ gemeinsam normalverteilt, d.h. $(X,Y)^T \sim N(\mu, \Sigma)$ mit Erwartungswertvektor $\mu = (\mu_X, \mu_Y)^T \in \mathbb{R}^2$ und Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix},$$

wobei $\sigma_X^2 = Var(X)$, $\sigma_Y^2 = Var(Y)$ und $\rho = Cov(X,Y)$. Zeige, dass für $|\rho| < 1$ gilt

$$\mathbb{E}(X|Y=y) \overset{\text{f.s.}}{=} \mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 3** (2 + 2 Punkte)

Es sei $(X_1, \dots, X_n)$ eine i.i.d. Zufallsstichprobe mit $X_1 \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Betrachte die Statistik

$$T(X_1, \dots, X_n) = 2n\lambda\bar{X}_n.$$

(a) Bestimme die Verteilung von $T$.

(b) Konstruiere mit Hilfe von $\bar{X}_n$ ein Konfidenzintervall für $\lambda$ zum Niveau $\gamma = 1 - \alpha$.

[1]Hinweis: Zeige, dass die Funktionen in (a) und (b) die Eigenschaften der bedingten Erwartung erfüllen.