



## Stochastik I - Übungsblatt 13

Abgabe: Dienstag, 14. Juli vor Beginn der Übung.

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

$X_1, \dots, X_n$  sei eine Stichprobe von i.i.d. Zufallsvariablen, wobei  $X_i \sim U(\theta - 1, \theta + 1)$  für ein  $\theta \in \mathbb{R}$ . Konstruiere ein (möglichst kleines) Konfidenzintervall für  $\theta$  zum Niveau  $1 - \alpha$  mit der Hoeffding-Ungleichung.

### Aufgabe 2 (3 + 3 + 2 Punkte)

Es seien  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda$ . Das Ziel dieser Aufgabe ist es, ein Konfidenzintervall für  $\lambda$  zu konstruieren<sup>1</sup>.

- Nutze die Eigenschaften der empirischen Momente (Satz 3.3.1), um ein asymptotisches Konfidenzintervall zum Niveau  $1 - \alpha = 0.95$  für  $\lambda$  zu konstruieren.
- Berechne<sup>2</sup> nun ein exaktes Konfidenzintervall für  $\lambda$  mit Hilfe von  $\min\{X_1, \dots, X_n\}$ .
- Erzeuge mit **R** jeweils 200 mal eine Realisierung der Stichprobe mit Umfang 10, 100 bzw. 1.000 und  $\lambda = 5$ . Wie oft liegt  $\lambda$  bei den jeweiligen Umfängen in dem in Teilaufgabe (a) bzw. (b) konstruierten Konfidenzintervall (wähle jeweils das Niveau  $1 - \alpha = 0.95$ )?

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ein Hersteller von Kopiermaschinen hat ein neues Modell entworfen. Um es mit dem alten zu vergleichen, hat er bei einer Firma zusätzlich zu den vorhandenen 20 alten Maschinen 13 neue aufgestellt. Zur Überprüfung möchte er die Anzahl der Probleme mit den alten Maschinen mit der Anzahl der Probleme bei den neuen vergleichen, wobei die Benutzung bei allen Kopierern ungefähr gleich stark ist. Dafür geht er davon aus, dass die Anzahl jeweils ungefähr Poisson-verteilt ist, bei den alten Maschinen mit Parameter  $\lambda_1$  und bei den neuen Maschinen mit Parameter  $\lambda_2$ . Ferner kann man davon ausgehen, dass die auftretenden Probleme unabhängig voneinander sind. Für seine Kunden möchte er ein (asymptotisches) Konfidenzintervall zum Niveau 95% für die Differenz von  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  angeben. Berechne dies anhand der Daten aus `kopierer.dat`.

### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Bei der Qualitätssicherung in einer Glühbirnenfabrik wird mit Stichproben aus der Produktion gearbeitet. Von der Geschäftsleitung wird behauptet, dass 90% der Glühbirnen funktionsfähig sind. Zur Überprüfung dieser Aussage werden nun 100 zufällig ausgewählte Glühbirnen untersucht, wobei festgestellt wird, dass 15 nicht funktionstüchtig sind. Formulieren Sie hierzu das Testproblem und führen Sie einen asymptotischen Test zum Niveau 0.05 durch.

<sup>1</sup>Tipp: Generell ist es bei der Exponentialverteilung einfacher, 0 als linken Rand für Konfidenzintervalle zu nehmen.

<sup>2</sup>Hinweis: Berechne zunächst ein Intervall, in dem  $\min\{X_1, \dots, X_n\}$  mit Wahrscheinlichkeit  $p$  liegt.