Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2015
6. Mai 2015

Stochastik I - Übungsblatt 4

Abgabe: Dienstag, 12. Mai vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (2 + 3 + 3 Punkte)

Beweise Lemma 3.2.2 aus der Vorlesung: Für $X \sim \mathsf{F}_{r,s}$, $r, s \in \mathbb{N}$ gilt

(a) $\mathbb{E}X = \frac{s}{s-2}$, falls $s \geq 3$,

(b) $\mathsf{Var}\ X = \frac{2s^2(r+s-2)}{r(s-4)(s-2)^2}$, falls $s \geq 5$,

(c) $\mathsf{F}_{r,s,\alpha} = \frac{1}{\mathsf{F}_{s,r,1-\alpha}}$, für $\alpha \in (0,1)$, wobei $\mathsf{F}_{r,s,\alpha}$ das α-Quantil der F-Verteilung mit r, s Freiheitsgraden ist.

Aufgabe 2 (3 + 2 Punkte)

Für $\alpha \in (0,1)$ bezeichnen wir mit z_α bzw. $\chi^2_{r,\alpha}$ die α-Quantile der Standardnormalverteilung bzw. der χ^2-Verteilung mit r Freiheitsgraden.

(a) Zeige[1], dass

$$\frac{\chi^2_{r,\alpha} - r}{\sqrt{2r}} \to z_\alpha, \quad (r \to \infty).$$

(b) Gib eine Näherung für das Quantil $\chi^2_{300,0.05}$ an.

Aufgabe 3 (4 + 6 Punkte)

Betrachte eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ von unabhängigen auf $(0,\theta)$ gleichverteilten Zufallsvariablen, wobei $\theta > 0$. Für den Parameter θ betrachten wir die Schätzer $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ definiert durch

$$\hat{\theta}_1 = c_1(n)\bar{X}_n, \qquad \hat{\theta}_2 = c_2(n) \max_{i=1,\ldots,n} X_i.$$

(a) Bestimme die Funktionen $c_j(n)$, $j = 1, 2$, so, dass die Schätzer erwartungstreu für θ sind[2].

(b) Welcher der beiden Schätzer ist besser? Zeige, dass $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ stark konsistente Schätzer für θ sind (mit $c_1(n)$ bzw. $c_2(n)$ wie in (a)).

Aufgabe 4 (2 + 1 Punkte)

Es sei eine Stichprobe von u.i.v. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gegeben mit $X_i \sim \mathsf{N}(\mu, 1)$, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt ist. Beobachtbar seien aber nur die Zufallsvariablen $Y_i = \mathbb{1}_{\{X_i \geq 0\}}$.

(a) Zeige: $Y_i \sim \mathsf{Ber}(\Phi(\mu))$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

(b) Untersuche den Schätzer $z_{\bar{Y}_n}$ für μ auf starke Konsistenz (z_α ist das α-Quantil der Standardnormalverteilung).

---

[1] Zeige, dass der Limes im Intervall $(z_{\alpha-\varepsilon}, z_{\alpha+\varepsilon})$ liegt, für kleine $\varepsilon > 0$.

[2] Berechne zunächst die Verteilungsfunktion des Maximums.