Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2015
19. Mai 2015

Stochastik I - Übungsblatt 6

Abgabe: Dienstag, 26. Mai vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen mit stückweise stetiger Dichte f. Zeige, dass die Dichte $f_{X_{(i)}}$ der i-ten Ordnungsstatistik $X_{(i)}$ gegeben ist durch

$$f_{X_{(i)}}(t) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} f(t) F(t)^{i-1} (1 - F(t))^{n-i}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2 (6 + 2 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d}}{\sim} U(0, \theta)$, $\theta > 0$. Zeige, dass

(a) für $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq n$ gilt

$$\mathbb{E} X_{(i)}^k = \frac{\theta^k n! (i + k - 1)!}{(n + k)! (i - 1)!}.$$

(b) Es gilt insbesondere $Var X_{(i)} = \frac{i(n-i+1)\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} F$ für eine Verteilungsfunktion F. Zeige[1], dass für den gleichmäßigen Abstand zwischen $\hat{F}_n$ und F,

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)|,$$

gilt, dass

$$D_n = \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} \max \left\{ F(X_{(i)} - 0) - \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} - F(X_{(i)}) \right\},$$

wobei $F(X_{(i)} - 0)$ den linksseitigen Grenzwert von F an der Stelle $X_{(i)}$ bezeichnet.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Es seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} Exp(1)$. Zeige[2], dass für die gemeinsame Verteilung der Ordnungsstatistiken gilt

$$\left(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)} \right) \overset{\text{d}}{=} \left(\frac{\nu_1}{n}, \frac{\nu_1}{n} + \frac{\nu_2}{n-1}, \ldots, \frac{\nu_1}{n} + \frac{\nu_2}{n-1} + \cdots + \frac{\nu_n}{1} \right),$$

wobei $\nu_1, \ldots, \nu_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} Exp(1)$.

[1] Beachte dabei, dass $\hat{F}_n(x)$ eine Treppenfunktion mit Sprungstellen $X_{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$ ist.

[2] Folgendes Resultat kann ohne Beweis verwendet werden: Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte f. Dann gilt für die gemeinsame Dichte von $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$

$$f_{X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}}(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} n! f(t_1) \ldots f(t_n) & , \ t_1 < t_2 < \cdots < t_n \\ 0 & , \ \text{sonst.} \end{cases}$$