Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2015
27. Mai 2015

Stochastik I - Übungsblatt 7

Abgabe: Dienstag, 2. Juni vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Beweise[1] Folgerung 3.3.3 aus dem Skript: Für $L(x) = \max\left\{\hat{F}_n(x) - \varepsilon_n, 0\right\}$ und $U(x) = \min\left\{\hat{F}_n(x) + \varepsilon_n, 1\right\}$ gilt

$$P\left(L(x) < F(x) < U(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}\right) \geq 1 - \alpha,$$

wobei $\varepsilon_n = \sqrt{\frac{1}{2n} \log\left(\frac{2}{\alpha}\right)}$, für ein $\alpha \in (0,1)$.

Aufgabe 2 (1 + 4 Punkte)

In dieser Aufgabe soll mit **R** ein Konfidenzband für eine Verteilungsfunktion F konstruiert werden zum Niveau $1 - \alpha$ für $\alpha = 0.1$, vgl. Aufgabe 1. Dazu betrachten wir die Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 2$ und die Standardnormalverteilung.

(a) Simuliere für die beiden Verteilungen jeweils 3 Stichproben von unabhängigen Zufallsvariablen mit Umfang 10, 100 bzw. 1000.

(b) Berechne jeweils die obere und untere Schranke (also die Funktionen L und U aus Aufgabe 1 und plotte diese gemeinsam mit der Verteilungsfunktion in ein Schaubild. Verwende dabei den **R**-Befehl `stepfun()` zum Plotten des Konfidenzbands und wähle einen sinnvollen Plot-Bereich.

Hinweis: In **R** kann man mit `pmin` das komponentenweise Minimum von Vektoren bestimmen.

Aufgabe 3 (4 + 2 + 2 Punkte)

Du stehst an einer Kasse, vor Dir sind noch 5 Kunden. Für die Bezahlung benötigen sie

30, 35, 5, 70 bzw. 20

Sekunden.

(a) Stelle ein geeignetes (einfaches) Modell für die 5 Zeiten auf, die die Kunden an der Kasse brauchen und die Zeit, die du benötigst. Gehe dafür von einer exponentialverteilten Dauer aus und finde ansonsten selbst sinnvolle Annahmen. Motiviere alle getroffenen Voraussetzungen.

(b) Berechne den Momentenschätzer für den Parameter der Exponentialverteilung deiner Bezahldauer. Verwende den Schätzwert auch in (c).

(c) Mit (ca.) welcher Wahrscheinlichkeit brauchst du zum Bezahlen länger als 30 Sekunden?

[1] Hinweis: Verwende die Ungleichung von Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Seien $U_1, \ldots, U_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} U([0,1])$ und $\nu_1, \ldots, \nu_{n+1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} Exp(1)$. Zeige, dass

$$\left(U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}\right) \overset{\text{d}}{=} \left(\frac{S_1}{S_{n+1}}, \ldots, \frac{S_n}{S_{n+1}}\right),$$

wobei $S_k = \sum_{i=1}^{k} \nu_i$, $k = 1, \ldots, n+1$.

Hinweis: Wende den Dichtetransformationssatz an auf

$$\begin{aligned} & T(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_{n+1}) \\ \text{und} \quad & S(z_1, \ldots, z_{n+1}) = \left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \frac{z_2}{z_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{z_{n+1}}, z_{n+1}\right). \end{aligned}$$