Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2015
2. Juni 2015

Stochastik I - Übungsblatt 8

Abgabe: Dienstag, 9. Juni vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (1 + 3 + 3 Punkte)

Konstruiere für folgende Verteilungen jeweils einen gemeinsamen Momentenschätzer für alle Parameter.

(a) Exponentialverteilung $Exp(\lambda)$: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$.

(b) Gleichverteilung auf (a, b): $f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{(a,b)}(x)$.

(c) Geometrische Verteilung $Geo(p)$: $p_k = (1-p)p^{k-1}$, für $k \in \mathbb{N}$. Berechne für die geometrische Verteilung auch die benötigten Momente.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 4 Punkte)

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Dichte $f(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x)$ für ein $\theta > 0$.

(a) Bestimme einen ML-Schätzer für θ.

(b) Bestimme einen Momentenschätzer für θ.

(c) Welcher der beiden Schätzer aus (a) und (b) ist besser?

Aufgabe 3 (3 Punkte)

In einem Eierkarton sind 11 weiße und 1 braunes Ei. Es gibt 3 Bauernhöfe, von denen die Lieferung stammen könnte. Sie liefern jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\theta_1 = 0.05$, $\theta_2 = 0.10$ bzw. $\theta_3 = 0.15$ braune Eier. Wende das Maximum-Likelihood-Prinzip an, um herauszufinden, von wem die Lieferung vermutlich stammt[1].

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte)

(a) Berechne einen ML-Schätzer für den Parameter λ der Exponentialverteilung.

(b) Es sei eine Verteilungsfunktion für $\theta > 1$ gegeben durch

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 1 - \theta^{-x} & ; \ x > 0 \\ 0 & ; \ \text{sonst} \end{cases}$$

Berechne einen ML-Schätzer für den Parameter θ dieser Verteilung mit Hilfe von Teil (a).

[1] Du kannst annehmen, dass die Farbe jedes Eis unabhängig von der der anderen Eier und Bernoulli-verteilt ist. Hier ist der Parameterraum von θ eingeschränkt auf $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$.