



## Stochastik I - Probeklausur

Besprechung: Donnerstag, 23. Juli, 10-12 Uhr in H20.

### Aufgabe 1

Betrachte den **R**-Quelltext weiter unten. Du kannst davon ausgehen, dass die Vektoren  $x$  und  $y$  in Zeile 1 immer die gleiche Länge besitzen.

- Was speichert die Funktion  $f()$  in der Variable  $a$ ? Gib sowohl eine mathematische Formel als auch den Fachausdruck dafür an.
- Gib die in Zeile 10 berechnete Formel als mathematischen Ausdruck an.
- Wie nennt man den von  $f()$  berechneten Wert, und wie ist das Ergebnis in Zeile 13 zu interpretieren?

### Quelltext zu Aufgabe 1:

```
1 > f<-function(x, y) {
2 + a <- numeric(0)
3 + for (i in 1:length(x))
4 +   a[i] <- length(x[x <= x[i]])
5 +
6 + b <- numeric(0)
7 + for (i in 1:length(y))
8 +   a[i] <- length(y[y <= y[i]])
9 +
10 + sum((a-mean(a)) * (b-mean(b))) / sqrt( sum((a-mean(a))^2) * sum((b-mean(b))^2))
11 + }

12 > f(daten$x, daten$y)
13 [1] -0.1537348
```

### Aufgabe 2

Sei  $X_1, \dots, X_n$  eine i.i.d. Zufallsstichprobe mit  $X_i \sim F$ . Es bezeichne  $\hat{F}_n$  die empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe. Zeige, dass

$$\text{Cov}(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y)) = \frac{F(\min\{x, y\}) - F(x)F(y)}{n},$$

für beliebige  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt.

### Aufgabe 3

Es seien  $Y_1, \dots, Y_n$  unabhängig und identisch  $N(0, \sigma^2)$ -verteilt. Beobachtbar seien aber nur  $X_i = Y_i^2$  für  $i = 1, \dots, n$ .

- (a) Zeige, dass  $X_i \stackrel{d}{=} \sigma^2 Z_i$  für  $Z_i \sim \chi_1^2$  gilt, und somit  $X_i$  für  $x \geq 0$  die Dichte

$$f_{X_1}(x) = \frac{\exp(-x/2\sigma^2)}{\sigma\sqrt{2\pi x}}$$

hat.

- (b) Berechne einen M-Schätzer für  $\sigma^2$  der nur von  $X_1, \dots, X_n$  abhängt.  
(c) Berechne einen ML-Schätzer für  $\sigma$  und einen für  $\sigma^2$ , die beide nur von  $X_1, \dots, X_n$  abhängen.

### Aufgabe 4

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit  $X_i \sim U(\theta_1, \theta_2)$ ,  $\theta_1 < \theta_2$  und  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ .

- (a) Zeige, dass  $T = (X_{(1)}, X_{(n)})$  ein suffizienter Schätzer für  $(\theta_1, \theta_2)$  ist.  
(b) Es darf zusätzlich angenommen werden, dass  $T$  ein vollständiger Schätzer ist. Konstruiere ausgehend von  $T$  einen besten erwartungstreuen Schätzer für  $(\theta_1 + \theta_2)/2$ . Begründe deine Antwort.

### Aufgabe 5

Die Abfüllmenge von Backpulver (in g) werde durch die Zufallsvariable  $X \sim N(\mu, 50)$  beschrieben. Für 73 (zufällig und unabhängig) ausgewählte Backpulververpackungen ergab sich ein durchschnittliches Gewicht von  $\bar{x}_{73} = 51g$ .

- (a) Teste die Hypothese

$$H_0 : \text{Das Durchschnittsgewicht des Backpulvers beträgt } 53g$$

zum Niveau 0.05. Verwende hier folgendes Quantil der Standardnormalverteilung:  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$ .

- (b) Sei nun 51g der tatsächliche Wert von  $\mu$ . Wie groß ist die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art bei dem in (a) verwendeten Test? Die Werte der Standardnormalverteilung müssen nicht berechnet werden.  
(c) In welchem Intervall muss  $\bar{x}_{73}$  liegen, falls  $H_0$  nicht verworfen wird?

**Zusätzlich eine multiple choice Aufgabe!**