Malliavin-Operatoren im 1-dimensionalen Fall

- Ziel: 2.Ordnung Poincaré-Ungleichung

  Sei $N \sim \mathcal{N}(0,1)$. Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regulär genug mit $\mathbb{E}[f(N)] = 0$ und $\mathbb{E}[f(N)^2] = 1$,

  $$d_W(f(N), N) \le \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \Big(\mathbb{E}[f''(N)^4]\Big)^{1/4} \Big(\mathbb{E}[f'(N)^4]\Big)^{1/4}.$$

- Werkzeug:

  Malliavin-Kalkül + 1.Ordnung Poincaré-Ungleichung

Malliavin-Operatoren: $D^p, \delta^p,\ p = 1, 2, \ldots$ und $P_t,\ t \geq 0$.

Rechenregeln: Für $N \sim N(0,1)$, $f \in \mathbb{D}^{p,2}$, $g \in \operatorname{dom} \delta^p$ und $t \geq 0$,

1. $\langle D^p f, g \rangle_{L^2(\gamma)} = \langle f, \delta^p g \rangle_{L^2(\gamma)}$
2. $P_0 f(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}$
3. $P_\infty f(x) = \mathbb{E}[f(N)],\ x \in \mathbb{R}$
4. $|P_t f(x)| \leq |f(x)|,\ x \in \mathbb{R}$
5. $P_t f \in \mathbb{D}^{1,2}$
6. $D P_t f = e^{-t} P_t D f$
7. $\frac{d}{dt} P_t f = P_t L f = L P_t f$
8. $L f = -\delta D f$.

1.Ordnung Poincaré-Ungleichung: $\operatorname{Var} f(N) \leq \mathbb{E}[f'(N)^2],\ f \in \mathbb{D}^{1,2}$.