Nicht-gleichmäßige Berry-Esseen Schranken

Eine Einführung in die Methode von Stein

Maximilian Beckers | 25. April 2016 |
Institut für Stochastik

Theorem 1

Beim letzten mal:
Seien $\xi_1, ..., \xi_n$ unabh. mit Erwartunsgwert 0 , $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i^2 = 1$, $W = \sum_{i=1}^n \xi_i, \gamma = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}|\xi_i|^3$ und $\mathbb{E}|\xi_i|^3 < \infty$. Dann gilt

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}(W \leq z) - \Phi(z)| \leq C_0 \gamma.$$

Heute:
Es existiert eine Konstante C, sodass für jede reelle Zahl z,

$$|\mathbb{P}(W \leq z) - \Phi(z)| \leq \frac{C\gamma}{1 + |z|^3}.$$

Definitionen

Seien $\xi_1, ..., \xi_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\xi_i = 0$ für alle $1 \le i \le n$ und $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i^2 = 1$. Sei weiter

$$\overline{\xi}_i := \xi_i I_{\{\xi_i \le 1\}},$$

$$\overline{W} := \sum_{i=1}^n \overline{\xi}_i,$$

$$\overline{W}^{(i)} := \overline{W} - \overline{\xi}_i.$$

Lemma 1

Es gilt

$$\mathbb{P}(a \leq \overline{W}^{(i)} \leq b) \leq e^{-a/2}\,(5\,(b-a) + 7\,\gamma)$$

für alle reellen $b > a$ und für jedes $1 \leq i \leq n$, wobei $\gamma = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|\xi_i|^3$.

Lemma 2

Seien $\eta_1, ..., \eta_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\eta_i \leq 0$, $\eta_i \leq \alpha$ für $1 \leq i \leq n$, und $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\eta_i^2 \leq B_n^2$. Weiter sei $S_n = \sum_{i=1}^n \eta_i$. Dann gilt

$$\mathbb{E}e^{tS_n} \leq \exp\left(\alpha^2 \left(e^{t\alpha} - 1 - t\alpha\right) B_n^2\right) \quad \text{für } t > 0,$$

Skizze des Beweises von Lemma 1

Es folgt mit Lemma 2, $\alpha = 1$ und $B_n^2 = 1$, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a \leq \overline{W}^{(i)} \leq b) &\leq e^{-a/2}\mathbb{E}e^{\overline{W}^{(i)}/2} \\ &\leq e^{-a/2}\exp\left(e^{1/2} - \frac{3}{2}\right) \\ &\leq 1.19e^{-a/2}.\end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung für $7\gamma \geq 1.19$.

Skizze des Beweises von Lemma 1

Sei nun $\gamma \leq 1.19/7 = 0.17$. Definiere $\delta := \gamma/2$ (≤ 0.085), und setze

$$f(w) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } w < a - \delta, \\ e^{w/2}(w - a + \delta) & \text{wenn } a - \delta \leq w \leq b + \delta, \\ e^{w/2}(b - a + 2\delta) & \text{wenn } w > b + \delta. \end{cases}$$

Idee : Schätze $\mathbb{E}(W^{(i)} f(\overline{W}^{(i)}))$ nach oben und unten ab, indem die besondere Struktur von f ausgenutzt wird.

Skizze des Beweises von Lemma 1

Elementare Schritte sind dabei die Darstellung

$$\mathbb{E}\{W^{(i)} f(\overline{W}^{(i)})\} = \mathbb{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f'(\overline{W}^{(i)} + t)\overline{M}^{(i)}(t)\,\mathrm{d}t\right\}$$

mit

$$\overline{M}_i(t) = \xi_i(I_{\{\bar{\xi}_i \le t \le 0\}} - I_{\{0 < t \le -\bar{\xi}_i\}}), \quad \overline{M}^{(i)}(t) = \sum_{j \neq i} \overline{M}_j(t).$$

und die Abschätzung

$$\mathbb{E}\{e^{(\overline{W}^{(i)})/2} I_{\{a \le \overline{W}^{(i)} \le b\}}\} \textstyle\sum_{j \neq i} \mathbb{E}\{|\xi_j| \min(\delta, |\bar{\xi}_j|)\}$$
$$\ge 0.43 e^{\frac{a}{2}} \mathbb{P}(a \le \overline{W}^i \le b)$$

Lemma 3

Sei $2 < p \leq 3$, und seien $\{\eta_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\eta_i = 0$ und $\mathbb{E}|\eta_i|^p < \infty$. Setze $S_n = \sum_{i=1}^n \eta_i$ und $B_n^2 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\eta_i^2$. Dann gilt

$$\mathbb{E}|S_n|^p \leq (p-1)\ B_n^p + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}|\eta_i|^p.$$

Lemma 4

Für $s < t \leq 1$ gilt

$$\mathbb{E}\{(\overline{W}^{(i)} + t)\, f_z(\overline{W}^{(i)} + t)\} - \mathbb{E}\{(\overline{W}^{(i)} + s)\, f_z(\overline{W}^{(i)} + s)\}$$
$$\leq C\, e^{-z/2}\, (|s| + |t|).$$

Zu Erinnerung

Theorem 1
Es existiert eine Konstante C, sodass für jede reelle Zahl z,

$$|\mathbb{P}(W \leq z) - \Phi(z)| \leq \frac{C\gamma}{1 + |z|^3}.$$

Anmerkungen zur Konstanten C

Es kann $C = 31.935$ gewählt werden.
L. Paditz (1989)

Im Fall von i.i.d. Zufallsvariablen sogar $C = 30.54$.
R. Michel (1981)

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!