Malliavin-Kalkül für den isonormalen Prozess

Jürgen Kampf | Institut für Stochastik | 4. 7. 2016

Seminar "Stochastisch Geometrie und Anwendungen"

Definition

Eine Familie $X = (X(t))_{t \in T}$ von ($\mathbb{R}$-wertigen) Zufallsvariablen, die durch eine Menge T indiziert wird, heißt *stochastischer Prozess*. Zwei stochastische Prozesse $(X(t))_{t \in T}$ und $(Y(t))_{t \in T}$ haben *die selbe Verteilung*, $X \overset{d}{=} Y$, falls

$$(X(t_1), \dots, X(t_n)) \overset{d}{=} (Y(t_1), \dots, Y(t_n)), \qquad t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1.$$

Definition

Ein Hilbertraum ist

- ein Vektorraum H
- mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$
- derart, dass $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vollständig ist.

Definition

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum.
Ein stochastischer Prozess $(X(t))_{t \in H}$ heißt *isonormaler Prozess*, falls

(i) X ein Gaußscher Prozess ist, d.h.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(t) \sim \mathcal{N}, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, t_1, \ldots, t_n \in H$$

(ii) $\mathbb{E}[X(t)] = 0, \quad t \in H$

(iii) $\mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = \langle t_1, t_2 \rangle, \quad t_1, t_2 \in H$

Bemerkung:

Zwei isonormale Prozesse auf einem Hilbertraum haben dieselbe Verteilung.

Satz

Auf jedem Hilbertraum gibt es einen isonormalen Prozess.

Beweis: Existenzsatz von Kolmogorow.

Voraussetzungen ab jetzt:

- X sei isonormaler Prozess auf Hilbertraum H.
- Die σ-Algebra Σ des zu Grunde liegenden W'Raums sei von X erzeugt, $\Sigma = \sigma(X)$.

Hermite-Polynom:

$$W_n = \mathrm{Div}^n\, 1,$$

d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} f^{(n)}(x) \cdot 1 \, d\gamma(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot W_n(x) \, d\gamma(x).$$

Satz

(i) *Es gelten die Rekursionsformeln:*

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1, \\ W_1(x) &= x, \\ W_{n+1}(x) &= xW_n(x) - nW_{n-1}(x) \end{aligned}$$

(ii)

$$\int_{\mathbb{R}} W_n(x) W_m(x) d\gamma(x) = \begin{cases} n! & \textit{falls } n = m \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Satz

Sei (Y, Z) Gauß-verteilt mit $Y, Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[W_n(Y)W_m(Z)] = \begin{cases} n!(\mathbb{E}[YZ])^n & \textit{falls } n = m \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Zum Beweis:
Sei $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ unabhängig von Z, $\rho := \mathrm{Cov}(Y, Z)$,
$\tilde{Y} := \sqrt{1 - \rho^2}X + \rho Z$.
Dann ist $(\tilde{Y}, Z) \overset{d}{=} (Y, Z)$.
Weiter über Ornstein-Uhlenbeck-Halbgruppe <u>oder</u> Summenformel für Hermite-Polynome.

Definition

Für einen W'Raum $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ und einen Hilbertraum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist

$$\mathcal{L}^2(\Omega; H) = \{F : \Omega \to H \mid F \text{ ist messbar }, \mathbb{E}[\|F\|^2] < \infty\},$$

wobei $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle$.
Falls $H = \mathbb{R}$ schreiben wir $\mathcal{L}^2(\Omega) := \mathcal{L}^2(\Omega; \mathbb{R})$.
$\mathcal{L}^2(\Omega; H)$ ist wiederum ein Hilbertraum mit

$$\langle F, G \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega; H)} = \mathbb{E}[\langle F, G \rangle_H].$$

Bemerkung:
Eine Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^2(\Omega; H)$ heißt konvergent gegen $F \in \mathcal{L}^2(\Omega; H)$, falls

$$\lim_{n \to \infty} \langle F_n - F, F_n - F \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega; H)} = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[\|F_n - F\|^2] = 0.$$

Definition

Sei $n \geq 0$. Der von

$$\{\Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto W_n(X(t)(\omega)) \mid t \in H, \|t\| = 1\}$$

aufgespannte Raum heißt *n-tes Wiener-Chaos* $\mathbb{W}_n$.

Korollar

Für $n \neq m$ sind $\mathbb{W}_n$ und $\mathbb{W}_m$ orthogonal.

Definition

Sei $n \geq 0$. Der von

$$\{\Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto W_n(X(t)(\omega)) \mid t \in H, \|t\| = 1\}$$

aufgespannte Raum heißt *n-tes Wiener-Chaos* $\mathbb{W}_n$.

Korollar

Für $n \neq m$ sind $\mathbb{W}_n$ und $\mathbb{W}_m$ orthogonal.

Satz

Für $F \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ mit $F_n \in \mathbb{W}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n,$$

wobei die Reihe in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ konvergiert.

Definition

Diese Zerlegung heißt *Wiener-Ito-Chaos-Zerlegung*. Für $F \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ setzen wir

$$P_n(F) := F_n.$$

Beispiel:

Was ist $P_0(F)$?
Hinweise:

- $F = \sum_{n=0}^{\infty} P_n F$
- $\mathbb{E}P_n(F) = 0$ für $n \geq 1$, da $\int_{\mathbb{R}} W_n(x) W_0(x)\, d\gamma(x) = 0$
- $P_0(F)$ ist deterministisch

Lösung:

$$P_0(F) = \mathbb{E}F$$

Beispiel:

Was ist $P_0(F)$?
Hinweise:

- $F = \sum_{n=0}^{\infty} P_n F$
- $\mathbb{E} P_n(F) = 0$ für $n \geq 1$, da $\int_{\mathbb{R}} W_n(x) W_0(x) \, d\gamma(x) = 0$
- $P_0(F)$ ist deterministisch

Lösung:

$$P_0(F) = \mathbb{E} F$$

Beispiel:

Was ist $P_0(F)$?
Hinweise:

- $F = \sum_{n=0}^{\infty} P_n F$
- $\mathbb{E} P_n(F) = 0$ für $n \geq 1$, da $\int_{\mathbb{R}} W_n(x) W_0(x)\, d\gamma(x) = 0$
- $P_0(F)$ ist deterministisch

Lösung:

$$P_0(F) = \mathbb{E} F$$

Beispiel:

Was ist $P_0(F)$?
Hinweise:

- $F = \sum_{n=0}^{\infty} P_n F$
- $\mathbb{E} P_n(F) = 0$ für $n \geq 1$, da $\int_{\mathbb{R}} W_n(x) W_0(x)\, d\gamma(x) = 0$
- $P_0(F)$ ist deterministisch

Lösung:

$$P_0(F) = \mathbb{E} F$$

Definition

a) Es sei S_m der Raum aller C^∞-Funktionen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, für die alle Ableitungen durch Polynome beschränkt sind.

b) Eine Zufallsvariable F heißt *glatt*, falls sie eine Darstellung der Form

$$F = f(X(t_1), \dots, X(t_m)), \quad f \in S_m, t_1, \dots, t_m \in H,$$

besitzt.

c) Die *Malliavin-Ableitung* einer glatten Zufallsvariable F ist

$$DF := \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(t_1), \dots, X(t_m)) \cdot t_i.$$

Der Definitionsbereich $\mathfrak{D}(D)$ der Malliavin-Ableitung ist die Menge der glatten Zufallsvariablen.

Satz

Die Malliavin-Ableitung

$$DF := \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(t_1), \dots, X(t_m)) \cdot t_i.$$

einer Zufallsvariablen F ist unabhängig von der Wahl der Darstellung.

Beweis:

Sei $F = f(X(t_1), \dots, X(t_m)) = g(X(t_l), \dots, X(t_n))$

1. Schritt: Auffüllen der Stützstellen
2. Schritt: Reduzieren der Stützstellen auf linear unabhängige Menge.
3. Schritt: Jetzt ist die Darstellung eindeutig.

Satz

(i) *Die Menge* $\mathfrak{D}(D)$ *der glatten Zufallsvariablen liegt dicht in* $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

(ii) *Die Funktion*

$$D : \mathfrak{D}(D) \to \mathcal{L}^2(\Omega; H)$$

ist abschließbar, d.h.

wenn (F_n) *eine Folge in* $\mathfrak{D}(D)$ *mit Grenzwert* 0 *ist und* $(DF_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathcal{L}^2(\Omega; H)$ *konvergiert,*

dann gegen 0.

Korollar

Seien $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $\mathfrak{D}(D)$ mit selben Grenzwert $F \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Falls $(DF_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(D\tilde{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, dann gegen den selben Grenzwert.

Somit können wir D zu einem Operator $\bar{D}$ mit $\mathfrak{D}(D) \subseteq \mathfrak{D}(\bar{D}) \subseteq \mathcal{L}^2(\Omega)$ fortsetzen.

Satz

Sei $F := (F_1, ..., F_m) \in \mathfrak{D}(\overline{D})^m$ und $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Dann ist $\varphi \circ F \in \mathfrak{D}(\overline{D})$ und

$$\overline{D}(\varphi \circ F) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F)\overline{D}F_i.$$

Korollar

Seien $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $\mathfrak{D}(D)$ mit selben Grenzwert $F \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Falls $(DF_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(D\tilde{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, dann gegen den selben Grenzwert.

Somit können wir D zu einem Operator $\bar{D}$ mit $\mathfrak{D}(D) \subseteq \mathfrak{D}(\bar{D}) \subseteq \mathcal{L}^2(\Omega)$ fortsetzen.

Satz

Sei $F := (F_1, ..., F_m) \in \mathfrak{D}(\overline{D})^m$ und $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Dann ist $\varphi \circ F \in \mathfrak{D}(\overline{D})$ und

$$\overline{D}(\varphi \circ F) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F)\overline{D}F_i.$$

Korollar

Seien $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $\mathfrak{D}(D)$ mit selben Grenzwert $F \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Falls $(DF_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(D\tilde{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, dann gegen den selben Grenzwert.

Somit können wir D zu einem Operator $\bar{D}$ mit $\mathfrak{D}(D) \subseteq \mathfrak{D}(\bar{D}) \subseteq \mathcal{L}^2(\Omega)$ fortsetzen.

Satz

Sei $F := (F_1, ..., F_m) \in \mathfrak{D}(\overline{D})^m$ und $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Dann ist $\varphi \circ F \in \mathfrak{D}(\overline{D})$ und

$$\overline{D}(\varphi \circ F) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F)\overline{D}F_i.$$

Definition

Die Familie $U(t), t \geq 0$,

$$U(t) : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\Omega), \; F \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} P_n F$$

heißt *Ornstein-Uhlenbeck-Halbgruppe*.

Erinnerung: Letztes Mal:

$$U(t)(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) d\gamma(y).$$

Es gibt Funktion Ψ mit $F = \Psi(X)$.

Unabhängige Kopie X' von X (auf W'Raum $(\Omega \times \Omega, \Sigma \otimes \Sigma, \mathbb{P} \otimes \mathbb{P})$)

Satz (Mehlers Formel)

$$U(t)(F) = \mathbb{E}[\Psi(e^{-t}X + \sqrt{1 - e^{-2t}}X') \mid X]$$

Definition

Die Familie $U(t), t \geq 0$,

$$U(t) : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\Omega),\ F \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} P_n F$$

heißt *Ornstein-Uhlenbeck-Halbgruppe*.

Erinnerung: Letztes Mal:

$$U(t)(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) d\gamma(y).$$

Es gibt Funktion Ψ mit $F = \Psi(X)$.
Unabhängige Kopie X' von X (auf W'Raum $(\Omega \times \Omega, \Sigma \otimes \Sigma, \mathbb{P} \otimes \mathbb{P})$)

Satz (Mehlers Formel)

$$U(t)(F) = \mathbb{E}[\Psi(e^{-t}X + \sqrt{1-e^{-2t}}X') \mid X]$$

Satz

Die Ornstein-Uhlenbeck-Halbgruppe ist eine stark stetige Halbgruppe, d.h.

$$U(0) = Id, \tag{1}$$

$$U(s)U(t) = U(s+t) \qquad s, t \geq 0, \tag{2}$$

$$\lim_{t \to 0} U(t)F = F \qquad F \in \mathcal{L}^2(\Omega). \tag{3}$$

$$U(t) : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\Omega),\ F \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} P_n F$$

Satz

Die Ornstein-Uhlenbeck-Halbgruppe ist eine stark stetige Halbgruppe, d.h.

$$U(0) = Id, \tag{1}$$

$$U(s)U(t) = U(s+t) \qquad s,t \geq 0, \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0} U(t)F = F \qquad F \in \mathcal{L}^2(\Omega). \tag{3}$$

$$U(t) : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\Omega),\ F \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} P_n F$$

Definition

Der infinitesimale Erzeuger von U, d.h. der Operator

$$\Delta : \mathfrak{D}(\Delta) \to \mathcal{L}^2(\Omega), F \mapsto \lim_{t\to 0} \frac{U(t)F - F}{t}$$

heißt *Laplace-Operator*. Sein Definitionsbereich $\mathfrak{D}(\Delta) \subseteq \mathcal{L}^2(\Omega)$ ist die Menge der Zufallsvariablen F, für die der Grenzwert existiert.

Satz

Es gilt

$$\left\{ F \in L^2(\Omega) \middle| \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mathbb{E}((P_n F)^2) < \infty \right\} = \mathfrak{D}(\Delta)$$

und

$$\Delta F = -\sum_{n=1}^{\infty} n P_n F, \quad F \in \mathfrak{D}(\Delta).$$

Satz

Der Operator $\Delta : \mathfrak{D}(\Delta) \to \mathcal{L}^2(\Omega)$ hat einen rechtsinversen Operator $\Delta^{-1} : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathfrak{D}(\Delta)$, d.h.

$$\Delta\Delta^{-1}R = R \text{ für alle } R \in \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ mit } \mathbb{E}[R] = 0.$$

Dieser ist gegeben durch

$$\Delta^{-1}R = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} P_n R, \quad R \in \mathcal{L}^2(\Omega).$$

Beweis: *Für $R \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ gilt*

$$\Delta\Delta^{-1}R = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P_n R \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n R = R - \mathbb{E}[R].$$

Definition

Wir definieren die *Divergenz* auf

$$\mathfrak{D}(\mathrm{Div}) := \{u \in \mathcal{L}^2(\Omega; H) \mid \exists_{c>0} : \\ \forall_{F \in \mathfrak{D}(D)} : |\langle DF, u\rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega;H)}| \leq c\|F\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\}$$

durch

$$\langle \mathrm{Div}(u), F\rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \langle u, DF\rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega;H)}, \quad F \in \mathfrak{D}(D).$$

Gibt es genau ein Element $\mathrm{Div}(u) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, dass diese Gleichung erfüllt?

Erinnerung:

Für eine lineare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\langle y, x\rangle = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Definition

Wir definieren die *Divergenz* auf

$$\mathfrak{D}(\mathrm{Div}) := \{u \in \mathcal{L}^2(\Omega; H) \mid \exists_{c>0} : \\ \forall_{F \in \mathfrak{D}(D)} : |\langle DF, u \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega;H)}| \leq c \|F\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\}$$

durch

$$\langle \mathrm{Div}(u), F \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \langle u, DF \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega;H)}, \quad F \in \mathfrak{D}(D).$$

Gibt es genau ein Element $\mathrm{Div}(u) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, dass diese Gleichung erfüllt?

Erinnerung:

Für eine lineare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\langle y, x \rangle = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Satz

Sei $F \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Dann ist

$$F \in \mathfrak{D}(\Delta) \quad \Longleftrightarrow \quad F \in \mathfrak{D}(\bar{D}) \text{ und } \bar{D}F \in \mathfrak{D}(\mathrm{Div}).$$

In diesem Fall ist

$$\mathrm{Div}(DF) = -\Delta F.$$