Die allgemeine Methode von Stein und Poisson Approximation

Seminar Einführung in die Methode von Stein

Niels Neveling | 14. Juni 2016 | Institut für Stochastik

Inhaltsverzeichnis

Überblick

Allgemeines Setting

- $(S,\mathcal{S},\mu)$ - *Wahrscheinlichkeitsraum*
- $\chi = \{h : S \to \mathbb{R} | h \textit{ messbar}\}$
- $\chi_0 \subset \chi$, s.d. $\forall h \in \chi_0 : \int_S |h| \,\mathrm{d}\mu < \infty$
- μ_0 - Maß auf $(S,\mathcal{S})$, s.d. $\forall h \in \chi_0$:
  $\int_S |h| \,\mathrm{d}\mu_0 < \infty$ und $\int_S h \,\mathrm{d}\mu_0$ ist berechenbar

Die Stein Gleichung

Ziel: Berechne für $h \in \chi_0 : \int_S h \,\mathrm{d}\mu \approx \int_S h \,\mathrm{d}\mu_0$
$\rightarrow$ Fehlerabschätzung

Stein Gleichung

Finde $T_o : \mathcal{F}_0 \rightarrow \chi$, sodass $\forall h \in \chi_0$:

$$T_o f = h - \int_S h \,\mathrm{d}\mu_0$$

eine Lösung in $\mathcal{F}_0$ hat.

$\rightarrow |\int_S T_0 f \,\mathrm{d}\mu| =$ Approximationsfehler

Konstruktion des Stein Operators

Prozedur von Stein (1986)

- Wähle Tupel (X,Y) von vertauschbaren Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ mit Marginalen μ_0.
- Wähle $\alpha : \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}$, wobei $\mathcal{F} = \{F : S^2 \to \mathbb{R}|$ F messbar & antisymmetrisch $\}$
- Setze $T : \mathcal{F} \to \chi$, $TF(x) = \mathbb{E}[F(X, Y)|X = x] \forall x \in S$
- Definiere $T_0 \doteq T \circ \alpha$

$\Rightarrow$ Stein Identität $\int_S T_0 f \, \mathrm{d}\mu_0 = 0$

Überblick

Konstruktion des Stein Operators

- $(S,\mathcal{S},\mu) = (\mathbb{N}_0,\mathcal{P}(\mathbb{N}_0),\mu)$
- $\mu_0 = Poi(\lambda), \lambda > 0$
- $\mathcal{F}_0 = \chi \Rightarrow T_0 f : \chi \to \chi$
- $(X, Y) = (Z_u,Z_0)$, wobei $Z = \{Z_t | t \in \mathbb{R}_+\}$ - ein Geburts-Todesprozess mit Geburtenrate $\lambda > 0$ und Todesrate $\delta_i = i$
- $(\alpha g)(k, l) = g(k) - g(l)$ für $(k, l) \in \mathbb{N}_0^2$
- $(TF)(k) = \mathbb{E}[F(Z_0,Z_u)|Z_0 = k]$ für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow T_0 f(k) &= \lim_{u\to 0} \frac{1}{u}(T \circ \alpha g)(k)\\ &= \lambda f(k+1) - kf(k)\end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}_0, f(k) = g(k) - g(k-1) \in \chi$

Lösung der Stein Gleichung

Theorem 1

Die Stein Gleichung

$$T_0 f = h - \int_{\mathbb{N}_0} h \, \mathrm{d}\mu_0$$

hat für jedes μ_0-integrierbare $h \in \chi$ eine Lösung f_h, die für $k \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt ist durch:

$$\begin{aligned} f_h(k) &= \frac{(k-1)!}{\lambda^k} \sum_{i=0}^{k-1} \left(h(i) - \int_{\mathbb{N}_0} h \, \mathrm{d}\mu_0 \right) \frac{\lambda^i}{i!} \\ &= -\frac{(k-1)!}{\lambda^k} \sum_{i=k}^{\infty} \left(h(i) - \int_{\mathbb{N}_0} h \, \mathrm{d}\mu_0 \right) \frac{\lambda^i}{i!} \end{aligned}$$

Eigenschaften der Lösung

Theorem 2

Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{N}_0,\mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$. Dann gilt:

$$\mu \sim Poi(\lambda) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{N}_0} T_0 f \,\mathrm{d}\mu = 0 \;\forall f : \mathrm{N}_0 \to \mathbb{R} \text{ beschränkt}$$

Beweis.

„$\Rightarrow$“
$$\int_{\mathbb{N}_0} T_0 f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{\infty} T_0 f(k)\mu(k)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(f(k+1) - kf(k))e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 0$$

„$\Leftarrow$“Wähle $h = 1_A$ für $A \subset \mathbb{N}_0$.

□

Theorem 3

Sei $f_h \in \chi$ die eindeutige beschränkte Lösung der Stein Gleichung für ein beschränktes $h \in \chi$. Dann:

$$\|f_h\| \leq k_1(\lambda)(\sup_{i\in\mathbb{N}_0} h(i) - \inf_{i\in\mathbb{N}_0} h(i))$$

$$\|\Delta f_h\| \leq k_2(\lambda)(\sup_{i\in\mathbb{N}_0} h(i) - \inf_{i\in\mathbb{N}_0} h(i))$$

$$\text{Mit } k_1(\lambda) = min\left(1; \sqrt{\frac{2}{e\lambda}}\right) \text{ und } k_2(\lambda) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Beweis.

- $h = \mathbb{1}_{\{k\}}, k \in \mathbb{N}$

  $\Rightarrow f_{\{k\}}(i) = \frac{(i-1)!}{\lambda^i} \sum_{l=0}^{i-1} (\mathbb{1}_{\{k\}}(l) - \mu_0(k)) \frac{\lambda^l}{l!}, i \in \mathbb{N}$

  $\Rightarrow \Delta f_{\{k\}}(i) \leq f_{\{k\}}(k+1) - f_{\{k\}}(k) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}, \forall i \in \mathbb{N}$
- $h_+ = h - \inf_{i \in \mathbb{N}_0} h(i)$

  $\Rightarrow f(i) = \sum_{k=0}^{\infty} h_+(k) f_{\{k\}}(i), i \in \mathbb{N}$ löst die St.glg für h_+
- $h_- = \sup_{i \in \mathbb{N}_0} h(i) - h$

  $\Rightarrow -f$ löst die St.glg für h_-

$\square$

Überblick

Totale Variation

- $\{X_i | i \in I = \{1, ..n\}\}, n \in \mathbb{N}$ Indikator ZV
- $W = \sum_{i \in I} X_i$
- $\lambda = \mathbb{E}(W) = \sum_{i \in I} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i \in I} p_i$
- $\mu = \mathcal{L}(W),\ \mu_0 = Poi(\lambda)$
- $$\begin{aligned} d_{TV}(\mu, \mu_0) &= \sup_{A \subset \mathbb{N}_0} |\mu(A) - \mu_0(A)| \\ &= \sup_{A \subset \mathbb{N}_0} |\mathbb{E}[\lambda f_A(W+1) - W f_A(W)]| \end{aligned}$$

Der lokale Ansatz

- Für $i \in I$ teile $I \setminus \{i\}$ in 2 Teilmengen I_i^s und I_i^w, sodass

$$I_i^s = \{j \in I \setminus \{i\} | X_j \text{ hängt „stark" von } X_i \text{ ab}\}$$

- $Z_i = \sum_{j \in I_i^s} X_j$, $W_i = \sum_{j \in I_i^w} X_j$

Theorem 4

$$\begin{aligned} d_{TV}(\mathcal{L}(W), Poi(\lambda)) \leq k_2(\lambda) \sum_{i \in I} (p_i \mathbb{E}(X_i + Z_i) + \mathbb{E}(X_i Z_i)) \\ + k_1(\lambda) \sum_{i \in I} \mathbb{E}|p_i - \mathbb{E}(X_i | W_i)| \end{aligned}$$

Lemma 1

Mit den Notationen aus Theorem 4 gelten folgende elementare Ungleichungen:

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{E}[p_i f_A(W_i+1) - X_i f_A(W_i+1)]| &\leq ||f_A||\mathbb{E}|p_i - \mathbb{E}[X_i|W_i]| \\
|f_A(W+1) - f_A(W_i+1)| &\leq ||\Delta f_A||(X_i + Z_i) \\
|X_i f_A(W_i+1) - X_i f_A(W)| &\leq ||\Delta f_A|| X_i Z_i
\end{aligned}
$$

Der Paar Ansatz

- Definiere für $i \in I$ ZVen $\tilde{W}_i^1$ und W_i^1, sodass:

$$\mathcal{L}(\tilde{W}_i^1) = \mathcal{L}(W_i | X_i = 1) \text{ und } \mathcal{L}(W_i^1) = \mathcal{L}(W_i)$$

Theorem 5

$$\begin{aligned} d_{TV}(\mathcal{L}(W), Poi(\lambda)) \leq k_2(\lambda) \sum_{i \in I} (p_i \mathbb{E}(X_i + Z_i) + \mathbb{E}(X_i Z_i)) \\ + k_2(\lambda) \sum_{i \in I} p_i \mathbb{E} | W_i^1 - \tilde{W}_i^1 | \end{aligned}$$

Überblick

Das klassische Geburtstags Problem

- $n \in \mathbb{N}$ Bälle werden unabhängig in $d \in \mathbb{N}$ Boxen geworfen
- W sei die Anzahl an Paaren von Bällen in der selben Box.

Beispiel 1

$$d_{TV}(\mathcal{L}(W), Poi(\lambda)) \leq \frac{8\lambda(1 - e^{-\lambda})}{n - 1}$$

wobei $\lambda = \mathbb{E}(W) = \binom{n}{2} d^{-1}$.

Beweis.

- $I = \{i \subset \{1, ..., n\} \,|\, |i| = 2\}$
- $X_i = X_{\{i_1, i_2\}} = \mathbb{1}\{\text{Bälle } i_1 \& i_2 \text{ landen in der selben Box}\}$
- $W = \sum_{i \in I} X_i \Rightarrow \lambda = \mathbb{E}W = \binom{n}{2} d^{-1}$
- $I_i^s = \{j \in I \setminus \{i\} | i \cap j \neq \emptyset\}, I_i^w = \{j \in I \setminus \{i\} | i \cap j = \emptyset\}$

$$
\begin{aligned}
d_{TV}(\mathcal{L}(W), Poi(\lambda)) &\leq k_2(\lambda) \sum_{i \in I} \left(p_i \mathbb{E}(X_i + Z_i) + \mathbb{E}(X_i Z_i)\right) \\
&\quad + k_1(\lambda) \sum_{i \in I} \mathbb{E}|p_i - \mathbb{E}(X_i | W_i)| \\
&\leq \frac{8\lambda(1 - e^{-\lambda})}{n - 1}
\end{aligned}
$$

□

Das klassische Belegungsproblem

- $n \in \mathbb{N}$ Bälle werden unabhängig in $d \in \mathbb{N}$ Boxen geworfen
- W sei die Anzahl an leeren Boxen.

Beispiel 2

$$d_{TV}(\mathcal{L}(W), Poi(\lambda)) \leq (1-e^{-d(a_d)^n})(d(a_d)^n-(d-1)(a_{d-1})^n)$$

wobei $a_d = \frac{d-1}{d}$.

Beweis.

- $X_i = \mathbb{1}\{\text{i-te Box leer}\}$
- $I_i^s = \emptyset, I_i^w = I \setminus \{i\}$
- $\tilde{X}_{i,j}^1 = \mathbb{1}\{\text{j-te Box leer, nach erneutem Wurf aus Box i}\}$
- $\mathcal{L}(\tilde{X}_{i,j}^1 | j \in I_i^w) = \mathcal{L}(X_j, j \in I_i^w | X_i = 1)$
- $\tilde{W}_i^1 = \sum_{j \in I_i^w} \tilde{X}_{i,j}^1, W_i^1 = W_i$

$$
\begin{aligned}
d_{TV}(\mathcal{L}(W), Poi(\lambda)) &\leq k_2(\lambda) \sum_{i \in I} p_i \mathbb{E}|W_i^1 - \tilde{W}_i^1| \\
&\leq k_2(\lambda)[(\mathbb{E}W)^2 + \mathbb{E}W - \mathbb{E}W^2]
\end{aligned}
$$

□