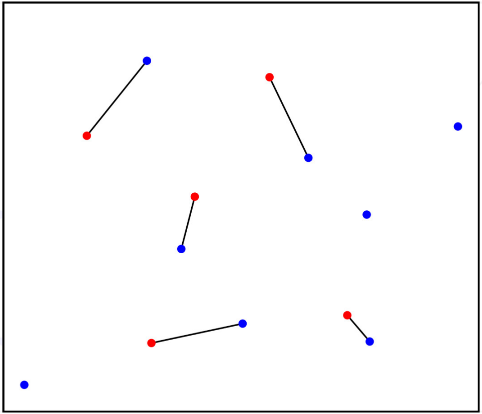


Poissonprozess Approximation

Seminar Einführung in die Methode von Stein

Matthias Weber | 20. Juni 2016 | Institut für Stochastik

Inhaltsverzeichnis

Punktprozesse

Sei $\mathcal{S}$ der Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$ der endlichen Zählmaße (Punktmuster) über einem kompakten metrischen Raum (W, ρ_0). Ein Punktmuster ψ lässt sich darstellen als

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$$

wobei und $x_1, \ldots, x_n \in W$ die Punkte des Musters sind.

Ein Punktprozess ist ein zufälliges Element Ψ aus $\mathcal{S}$.

Poissonprozesse

Sei $W \subset \mathbb{R}^d$. Ein Poissonprozess Π_Λ mit Intensitätsmaß $\Lambda \colon \mathcal{B}(W) \to [0, \infty)$ ist ein Punktprozess für den gilt:

- $\Pi_\Lambda(A) \sim \text{Pois}(\Lambda(A))$ für $A \in \mathcal{B}(W)$
- $\Pi_\Lambda(A_1), \dots, \Pi_\Lambda(A_n)$ sind paarweise unabhängig für disjunkte $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(W)$

Wir schreiben π_Λ für die Verteilung von Π_Λ. Falls Λ eine Dichte λ bezüglich ν_d besitzt schreiben wir auch π_λ.

Gibbsprozesse

Ein Punktprozess Ψ auf W heißt Gibbsprozess, wenn er eine Dichte $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ bezüglich π_1 hat und $u(\psi) = 0 \Rightarrow u(\phi) = 0$ falls $\psi \subset \phi$ erfüllt. $\beta^*\colon W \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ mit

$$\beta^*(x, \psi) = \frac{u(\psi + \delta_x)}{u(\psi)}$$

heißt bedingte Intensität von Ψ und erfüllt die Georgii-Nguyen-Zessin Gleichung

$$\mathbb{E}\left(\int_W h(x, \Psi - \delta_x)\Psi(dx)\right) = \int_W \mathbb{E}\left(h(x, \Psi)\beta^*(x, \Psi)\right) dx$$

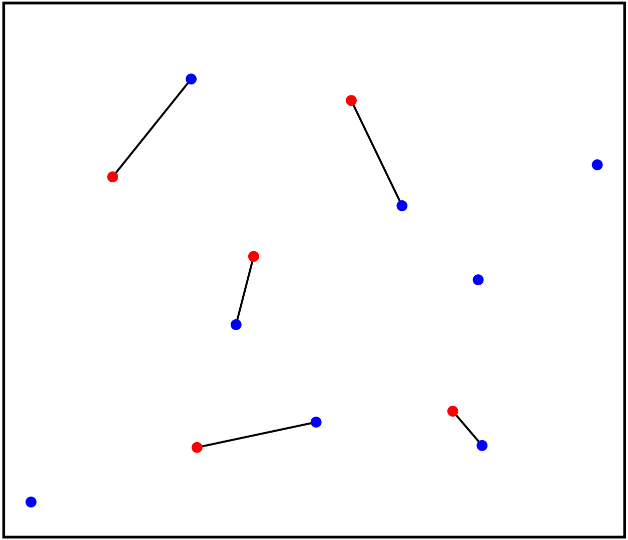
für jedes $h\colon W \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$.

Abstände zwischen Punktmustern

Seien ψ, ϕ zwei Punktmuster aus $\mathbb{N}$ mit Darstellungen $\psi = \sum_{i=1}^{m} \delta_{x_i}$, $\phi = \sum_{i=1}^{n} \delta_{y_i}$ und o.B.d.A $m \leq n$. Wähle $c > \text{diam}(W)$. Der Abstand zwischen ϕ und ψ wird definiert als:

$$\rho_1(\psi, \phi) = \frac{1}{n} \left(\min_{\sigma \in \Sigma_n} \sum_{i=1}^{m} \rho_0\left(x_i, y_{\sigma(i)}\right) + c(n-m) \right)$$

Dabei ist Σ_n die Gruppe der Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$.



Abstände zwischen Punktprozessen

Wir definieren den Totalvariations-Abstand zwischen den Verteilungen zweier Punktprozesse Φ, Ψ über $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$ als

$$\begin{aligned}\rho_{TV}(\mathbb{P}_\Phi, \mathbb{P}_\Psi) &= \sup_{A \in \mathcal{N}} |\mathbb{P}(\Psi \in A) - \mathbb{P}(\Phi \in A)| \\ &= \sup_{f \in \mathcal{F}_*} |\mathbb{E}f(\Psi) - \mathbb{E}f(\Phi)|\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{F}_* = \{f \colon \mathbb{N} \to [0,1], f \text{ messbar}\}$. Ersetze $\mathcal{F}_*$ durch $\mathcal{F}_W = \{f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}, |f(\psi) - f(\phi)| \leq \rho_1(\psi, \phi) \text{ für } \phi, \psi \in \mathbb{N}\}$ oder $\mathcal{F}_{BW} = \{f \in \mathcal{F}_W, f(\mathbb{N}) \subset [0,1]\}$, so erhält man den Wasserstein-Abstand ρ_W.

Allgemeine Stein-Gleichung

Stein-Gleichung:

$$f(x) - \int f\, dQ = \mathcal{A}h(x)$$

Für den Stein-Operator $\mathcal{A}$ soll gelten:

Z_* ist gemäß Q verteilt $\Leftrightarrow \mathbb{E}\mathcal{A}h(Z_*) = 0$ für ausreichend viele Funktionen $h\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$.

Generator-Ansatz

Markov-Prozess Z auf $\mathcal{S}$:

$$\mathbb{P}(Z(t+r) \in A | \{Z(s), s \leq t\}) = \mathbb{P}(Z(t+r) \in A | Z(t))$$

für jedes $A \in \mathcal{S}$ und $t \geq 0$.

Stationäre Anfangsverteilung Q:

$$\int \mathbb{P}\left(Z(r) \in A | Z(0) = x\right) Q(dx) = Q(A)$$

D.h. falls $Z(0) \sim Q$ verteilt ist, dann ist auch $Z(t) \sim Q$ für jedes t.

Generator-Ansatz

Infinitesimaler Generator $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}h(x) &= \frac{d}{dt}\left[\mathbb{E}\left(h\left(Z(t)\right)\middle|Z(0)=x\right)\right]\Big|_{t=0} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\mathbb{E}\left(h(Z(t))|Z(0)=x\right)-h(x)\right]\end{aligned}$$

Wobei dom($\mathcal{G}$) diejenigen $h\colon \mathcal{S}\to\mathbb{R}$ umfasst, für die obiger Grenzwert existiert.

Generator-Ansatz

Q ist stationäre Verteilung von Z genau dann, wenn

$$\int \mathcal{G} h \, dQ = 0$$

für ausreichend viele $h \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$.

Sei Z_x ein Markov-Prozess mit $Z_x(0) = x$ fast sicher, $\mathcal{G}$ der Generator und Q die stationäre Verteilung. Außerdem sei die Abbildung $t \mapsto \mathbb{E}f(Z_x(t))$ stetig und $h_f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ mit

$$h_f(x) = -\int_0^\infty \mathbb{E}f(Z_x(t)) - \mathbb{E}(f(Z_*))\,dt$$

wobei $Z_* \sim Q$ sei wohldefiniert.

Dann löst h_f die Stein-Gleichung

$$f(x) - \int f\,dQ = \mathcal{G}h(x)$$

Immigration-Todes Prozess

Ein räumlicher Immigrations-Todes Prozess auf W mit Immigrationsmaß Λ mit Dichte λ und Pro-Kopf-Todesrate 1 hat den Generator

$$\mathcal{A}h(\psi) = \int_W h(\psi+\delta_x) - h(\psi)\,\Lambda(dx) + \int_W h(\psi-\delta_x) - h(\psi)\,\psi(dx)$$

und die stationäre Verteilung π_λ, da $\mathbb{E}\mathcal{A}h(\Pi_\Lambda) = 0$.

Immigrations-Todes Prozess

Für einen I-T Prozess $Z_\psi(t)$ gestartet bei $\psi = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ gilt

$$Z_\psi(t) \overset{D}{=} Z_\emptyset(t) + D_\psi(t),$$

wobei

- $Z_\emptyset(t)$: I-T Prozess gestartet bei $\emptyset$
- $D_\psi(t)$: reiner Todesprozess gestartet bei ψ, unabhängig von $Z_\emptyset(t)$

$Z_\emptyset(t)$ ist ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $(1 - e^{-t})\Lambda$ und $D_\psi(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{U_i > t\}\, \delta_{x_i}$ mit $U_1, \dots, U_n$ iid. standard-exponentialverteilt.

Kopplungsstrategie

Seien $\psi = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}, \phi = \sum_{j=1}^{m} \delta_{y_j}, \chi = \sum_{k=1}^{l} \delta_{z_k} \in \mathbb{N}$ so dass ϕ, χ keine gemeinsamen Punkte haben. Seien

- $Z_{\psi+\phi}(t) = Z_\psi(t) + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}\left\{V_j > t\right\} \delta_{y_j}$
- $Z_{\psi+\chi}(t) = Z_\psi(t) + \sum_{k=1}^{l} \mathbf{1}\left\{W_k > t\right\} \delta_{z_k}$

I-T Prozesse wobei V_j, W_k iid. standard-exponentialverteilt. Dann ist ihre Kopplungszeit

$$\tau_{\psi+\phi,\psi+\chi} = \inf\left\{t > 0, Z_{\psi+\phi}(t) = Z_{\psi+\chi}(t)\right\}$$

unabhängig von Z_ψ und hat Verteilungsfunktion $F(t) = (1 - e^{-t})^{m+l}$ für $t > 0$.

Lösung der Steingleichung

Sei $\mathcal{A}$ der Generator des I-T Prozesses und $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ beschränkt und messbar. Dann löst

$$h_f(\psi) = -\int_0^\infty \mathbb{E}f(Z_\psi(t)) - \mathbb{E}f(\Pi)dt$$

die Stein-Gleichung

$$f(\psi) - \mathbb{E}f(\Pi) = \mathcal{A}h(\psi)$$

Oberschranke für Δh_f

Es gilt

$$\Delta h_f = \sup_{\psi \in \mathbb{N}, x \in W} |h_f(\psi + \delta_x) - h_f(\psi)| \\ \leq \begin{cases} 1 & \text{wenn } f \in \mathcal{F}_* \\ \min\left\{1, \frac{\log(|\Lambda| + \gamma + e^{-|\Lambda|}/|\Lambda|)}{|\Lambda|}\right\} & \text{wenn } f \in \mathcal{F}_W \end{cases}$$

wobei γ die Euler-Mascheroni-Konstante ist

Approximation von Gibbsprozessen

Sei Ψ ein Gibbsprozess mit bedingter Intensität β^* und Λ ein endliches Maß auf W mit Dichte λ. Dann gilt:

$$\rho(\mathbb{P}_\Psi, \pi_\Lambda) \leq \Delta h_f \int_W \mathbb{E} \left| \beta^*(x, \Psi) - \lambda(x) \right| dx$$