Stochastische Geometrie
Dr. Jürgen Kampf
SS 2016

ulm university universität uulm

4. Übungsblatt

Abgabe: 14. Juni, 16:15

Aufgabe 1: Kegel
(4 Punkte)

Sei $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), x \in \mathbb{R}^d, u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ und $n > \frac{1}{\alpha}$, $\tilde{u} \in \mathbb{Q}^d \setminus \{0\}$ mit $\langle u, \tilde{u} \rangle \geq \|u\| \cdot \|\tilde{u}\| \cdot \cos(\alpha - \frac{1}{n})$, $\tilde{x} \in K_\alpha(x, u)$. Man zeige, dass $K_{1/n}(\tilde{x}, \tilde{u}) \subseteq K_\alpha(x, u)$.

Aufgabe 2: Charakterisierung konvexer zufälliger abgeschlossener Mengen
(2+1+6=9 Punkte)

Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt konvex, falls für $x, y \in K$ und $\lambda \in [0, 1]$ auch $\lambda x + (1 - \lambda y) \in K$ gilt, mit anderen Worten falls für zwei Punkte $x, y \in K$ stets die gesamte Verbindungsstrecke $[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid y \in [0, 1]\}$ in K liegt. Wir bezeichnen das System abgeschlossener konvexer Mengen mit $\mathcal{H}$ und das System kompakter konvexer Mengen mit $\mathcal{K}$.

a) Zeige, dass $\mathcal{H}$ eine messbare Teilmenge von $\mathcal{F}$ ist. *Hinweis: Zeige, dass $\mathcal{H}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{F}$ ist.*

b) Seien $K, L \in \mathcal{F}$ derart, dass $K \cup L \in \mathcal{H}$ ist. Zeige, dass $[x, y] \cap K \cap L \neq \emptyset$ für $x \in K$ und $y \in L$ ist.

c) Sei Z eine zufällige abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^d$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

   (i) Z ist fast sicher konvex.

   (ii) $\mathbb{P}(Z \in \mathcal{F}^{K \cap L} \cap \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_L) = 0$ für $K, L \in \mathcal{F}$ mit $K, L \in \mathcal{H}$.

   (iii) $\mathbb{P}(Z \in \mathcal{F}^{K \cap L} \cap \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_L) = 0$, wobei $K = [x_0, z_0]_{\oplus\epsilon}$ und $L = [y_0, z_0]_{\oplus\epsilon}$ für $x_0, y_0 \in \mathbb{Q}^d$, $z_0 \in \mathbb{Q}^d \cap [x_0, y_0]$, $\epsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$.

   (iv) Die Einschränkung des Kapazitätsfunktionals auf $\mathcal{K}$ ist additiv, d.h.

$$T_Z(K \cup L) + T_Z(K \cap L) = T_Z(K) + T_Z(L) \quad \text{für } K, L \in \mathcal{K} \text{ mit } K \cup L \in \mathcal{K}.$$