ulm university universität uulm

Stochastische Geometrie

Institut für Stochastik

Vorlesungsskript

Dr. Jürgen Kampf

Sommersemester 2016

Stand: 14. Juli 2016

b

Literaturverzeichnis

[1] S. Chiu, D. Stoyan, W. S. Kendall, and J. Mecke. *Stochastic Geometry and Its Applications*. Wiley, 2013.

[2] K. Mecke and D. Stoyan. *Morphology of Condensed Matter*. Springer, 2002.

[3] I. Molchanov. *Theory of Random Sets*. Springer, 2005.

[4] R. Schneider and W. Weil. *Stochastic and Integral Geometry*. Springer, 2008.

[5] E. Spodarev. *Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields*. Springer, 2013.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Random variables in the space of closed sets

1.1 Definition of random closed sets and the capacity functional

Throughout this section we assume that the state space E is

- $E = \mathbb{R}^d$
- E is separable locally compact metric space
- E is a locally compact Hausdorff space with countable base

Definition 1.1. *Let (M, d) be a metric space.*

(i) A set $A \subseteq M$ is said to be dense in M, if the closure of A equals M.

(ii) The space (M, d) is called separable, if there is a countable, dense subset $A \subseteq M$.

Example: $\mathbb{Q}^d$ is dense in $\mathbb{R}^d$. Since $\mathbb{Q}^d$ is countable, $\mathbb{R}^d$ is separable.

Definition 1.2. *A metric space (M, d) is called locally compact if for every $x \in M$ there is $\epsilon > 0$ such that $\{y \in M \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$ is compact.*

Example: A normed space $(M, ||\cdot||)$ is locally compact if and only if it is finite dimensional.

We denote the set of closed subsets resp. compact subsets of E by $\mathcal{F}$ resp. $\mathcal{C}$. The set of open sets will be denoted by $\mathcal{G}$. Moreover, we put

$$\mathcal{F}^A := \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap A = \varnothing\},\ A \subseteq E$$
$$\mathcal{F}_A := \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap A \neq \varnothing\}$$

Definition 1.3. *The Matheron-σ-algebra is the σ-algebra generated by the sets of the form $\mathcal{F}^C, C \in \mathcal{C}$. A function from a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ into $\mathcal{F}$ is called random closed set, if it is measurable w.r.t. the Matheron-σ-algebra.*

Recall that the distribution of a random closed set Z is the probability measure on the Matheron-σ-algebra defined by $\mathbb{P}_Z(A) := \mathbb{P}(Z \in A)$. If two random closed sets Z and Z' have the same distribution, $\mathbb{P}_Z = \mathbb{P}_{Z'}$, we write $Z \overset{d}{=} Z'$.

Definition 1.4. *Let Z be a random closed set in E. Then $T_Z : \mathcal{C} \to [0, 1], C \mapsto \mathbb{P}(Z \cap C \neq \varnothing) = 1 - \mathbb{P}_Z(\mathcal{F}^C)$ is called capacity functional or Choquet functional of Z.*

Lemma 1.5. *Let $(\Omega, \mathcal{A})$ be a some measurable space and let $\mathcal{B}$ be some intersection-stable generating system of $\mathcal{A}$, i.e. for $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ we have $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ and $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$. If two measures μ and ν on $\mathcal{A}$ coincide on $\mathcal{B}$, i.e. $\mu(B) = \nu(B)$ for every $B \in \mathcal{B}$ and there is a sequence $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ with $\mu(B_i) < \infty$, $B_i \subseteq B_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$ such that $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$, then they coincide on $\mathcal{A}$.*

Theorem 1.6. *Let Z and $Z^{'}$ be two random closed sets in E. We have $Z \overset{d}{=} Z^{'}$ if and only if $T_Z = T_{Z'}$.*

Proof: Assume $T_Z = T_{Z'}$. Then $\mathbb{P}_Z(\mathcal{F}^C) = \mathbb{P}_{Z'}(\mathcal{F}^C)$ for all $C \in \mathcal{C}$. The system $\{\mathcal{F}^C \mid C \in \mathcal{C}\}$ generates the Matheron-σ-algebra and it is intersection stable, since for $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ we have

$$\mathcal{F}^{C_1} \cap \mathcal{F}^{C_2} = \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap C_1 = \varnothing \text{ and } F \cap C_2 = \varnothing\} = \mathcal{F}^{C_1 \cup C_2}.$$

Hence the lemma implies $\mathbb{P}_Z = \mathbb{P}_{Z'}$ on the whole Matheron-σ-algebra.
For a function $T : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ we define

$$\begin{aligned} S_0^T(C) &:= 1 - T(C), && C \in \mathcal{C} \\ S_k^T(C_0; C_1, \dots, C_k) &:= S_{k-1}^T(C_0; C_1, \dots, C_{k-1}) - S_{k-1}^T(C_0 \cup C_k; C_1, \dots, C_{k-1}), && C_0, \dots, C_k \in \mathcal{C}, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$ $\square$

Theorem 1.7. *Let $T : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ be a function. There is a random closed set Z with capacity functional T if and only if*

(a) $T(\varnothing) = 0$, $T(C) \in [0, 1]$ for all $C \in \mathcal{C}$

(b) For any sequence $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}$ with $C_{i+1} \subseteq C_i$ for all $i \in \mathbb{N}$ we have $\lim\limits_{i\to\infty} T(C_i) = T(C)$, where $C := \bigcap_{i=1}^\infty C_i$

(c) $S_k(C_0; C_1, \dots, C_k) \geq 0$ for $C_0, C_1, \dots, C_k \in \mathcal{C}$ and $k \in \mathbb{N}$.

Proof: We only show the easy direction.
(a) trivial
(b) For all $i \in \mathbb{N}$ we get $\mathcal{F}_{C_{i+1}} \subseteq \mathcal{F}_{C_i}$ from $C_{i+1} \subseteq C_i$. Therefore $\mathcal{F}_C \subseteq \bigcap_{i=1}^\infty \mathcal{F}_{C_i}$ In order to show that equality holds, let $F \in \bigcap_{i=1}^\infty \mathcal{F}_{C_i}$. Then $F \cap C_i \neq \varnothing$ for all $i \in \mathbb{N}$. By the intersection property of compact sets (Exercise!) $F \cap \bigcap_{i=1}^\infty C_i = \bigcap_{i=1}^\infty (F \cap C_i) \neq \varnothing$.
Now

$$\lim_{i\to\infty} T(C_i) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}_Z(\mathcal{F}_{C_i}) = \mathbb{P}_Z\big(\bigcap_{i=1}^\infty \mathcal{F}_{C_i}\big) = \mathbb{P}_Z(\mathcal{F}_C) = T(C).$$

(c) We will show more precisely

$$S_k^T(C_0; C_1, \dots, C_k) = \mathbb{P}_Z(\mathcal{F}^{C_0} \cap \mathcal{F}_{C_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{C_k})$$

for all $C_0, C_1, \dots, C_k \in \mathcal{C}, k \in \mathbb{N}$ by induction.

$$k = 0: \quad S_0^T(C_0) = 1 - T_Z(C_0) = \mathbb{P}_Z(\mathcal{F}^{C_0})$$

$k - 1 \to k:$

$$\begin{aligned} S_k^T(C_0; C_1, \dots, C_k) &= S_{k-1}^T(C_0; C_1, \dots, C_{k-1}) - S_{k-1}^T(C_0 \cup C_k; C_1, \dots, C_{k-1}) \\ &= \mathbb{P}_Z(\mathcal{F}^{C_0} \cap \mathcal{F}_{C_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{C_{k-1}}) - \mathbb{P}_Z(\mathcal{F}^{C_0} \cap \mathcal{F}^{C_k} \cap \mathcal{F}_{C_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{C_{k-1}}) \\ &= \mathbb{P}_Z(\mathcal{F}^{C_0} \cap \mathcal{F}_{C_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{C_{k-1}} \cap \mathcal{F}_{C_k}) \end{aligned}$$ $\square$

1.2 The metric space of closed sets

Definition 1.8. *A metric of closed convergence on $\mathcal{F}$ is a metric whose open sets are the sets*

$$\bigcup_{i\in I} \mathcal{F}^{C_i} \;\cup\; \bigcup_{i\in J} \mathcal{F}_{G_i}$$

where I, J are empty, finite, countable finite or uncountable index sets and $C_i \in \mathcal{C}$ for all $i \in I$ and $G_i \in \mathcal{G}$ for all $i \in J$.

Remark: It can be shown, using the Urysohn theorem, that such a metric really exists.

Theorem 1.9. *Let $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ be a sequence in $\mathcal{F}$ and let $F \in \mathcal{F}$. Then the following are equivalent:*

(a) $\lim_{j\to\infty} F_j = F$ *in one metric of closed convergence.*

(b) $\lim_{j\to\infty} F_j = F$ *in every metric of closed convergence.*

(c) Both (c_1) *and* (c_2) *hold.*

(c_1) If $G \in \mathcal{G}$ *and* $F \cap G \neq \varnothing$*, then* $F_j \cap G \neq \varnothing$ *for almost all* j*.*

(c_2) If $C \in \mathcal{C}$ *and* $F \cap C = \varnothing$*, then* $F_j \cap C = \varnothing$ *for almost all* j*.*

(d) Both (d_1) *and* (d_2) *hold.*

(d_1) If $x \in F$*, then there is a sequence* $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *with* $\lim_{j\to\infty} x_j = x$ *and* $x_j \in F_j$ *for almost all* j*.*

(d_2) For any subsequence $(F_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *of* $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *and any convergent sequence* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *with* $x_k \in F_{j_k}$ *we have* $\lim_{k\to\infty} x_k \in F$*.*

Proof: Recall that a sequence $(Z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in a metric space (M,d) convergences to $Z \in M$ if and only if for every sets open set $U \subseteq M$ with $Z \in U$ we have $Z_j \in U$ for almost all $j \in \mathbb{N}$.
$(a) \Rightarrow (c)$ For $G \in \mathcal{G}$ and $C \in \mathcal{C}$ the sets $\mathcal{F}^C$ and $\mathcal{F}_G$ are open. Hence $F \in \mathcal{F}^C$ resp. $F \in \mathcal{F}_G$ implies $F_j \in \mathcal{F}^C$ resp. $F_j \in \mathcal{F}_G$ for almost all j.
$(c) \Rightarrow (b)$ Consider an open set

$$U = \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}^{C_i} \cup \bigcup_{i\in J} \mathcal{F}_{G_i},$$

$C \in \mathcal{C}$, $G_i \in \mathcal{G}$ with $F \in U$. We have to show $F_j \in U$ for almost all j. According to (c) for each fixed $i \in I$ we have $F_j \in \mathcal{F}^{C_i}$ for almost all j and for each fixed $i \in J$ we have $F_j \in \mathcal{F}_{G_i}$. Since $F \in U$, we cannot have $I = J = \varnothing$. So, of course, $F_j \in U$ for all sufficiently large j.
$(c_1) \Rightarrow (d_1)$ Let $x \in F$. Let

$$G_n := B_{1/n}(x) = \{y \in E \mid d(x,y) < \frac{1}{n}\}.$$

By (c_1) (since $F \cap G_n \neq \varnothing$) there is j_n with $F_j \cap G_n \neq \varnothing$ for $j > j_n$. Put $J_n := \max\{j_1, \dots, j_n\}$. Then for all $j > j_1$ choose $x_j \in F_j \cap G_n$ for the number n with $J_n < j \leq J_{n+1}$. Then $d(x_j, x) < \frac{1}{n}$. Since n exceeds all bounds as $j \to \infty$, we have $\lim_{j\to\infty} x_j = x$.
$(c_2) \Rightarrow (d_2)$ Let $(F_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ be a subsequence and $x_k \in F_{j_k}$ for all $k \in \mathbb{N}$ with $\lim_{k\to\infty} x_k =: x$. Assume $x \notin F$. Then $\epsilon := \inf\{d(x,y) | y \in F\} > 0$ (Exercise!) and hence there is a compact set C with $x \in \operatorname{int} C$ and $C \cap F = \varnothing$. By (c_2) $C \cap F_j = \varnothing$ for almost all j and in particular $x_k \notin C$ for almost all k, contradicting $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.
$(d_1) \Rightarrow (c_1)$ Let $G \in \mathcal{G}$ with $F \cap G \neq \varnothing$. Then there exists $x \in F \cap G$. By (d_1) there is a sequence $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ with $x_j \in F_j$ for almost all j and $\lim_{j\to\infty} x_j = x$. In particular, $x_j \in G$ for almost all j, so $x_j \in F_j \cap G$ for almost all j and thus $F_j \cap G \neq \varnothing$.
$(d_2) \Rightarrow (c_2)$ Let $C \in \mathcal{C}$ and $C \cap F = \varnothing$. Assume $C \cap F_j = \varnothing$ for only finitely many j. Then there is a subsequence $(F_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ and points $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ with $x_k \in C \cap F_{j_k}$. Choosing a further subsequence, we may assume that $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converges to a point $x \in C$. Now (d_2) implies $x \in F$, a contradiction, since $x \in C$ and $C \cap F = \varnothing$. So $C \cap F_j = \varnothing$ for almost all j. □

Example: 1) Let $F_j = \left[0, 1 - \frac{1}{j}\right]$, $j \in \mathbb{N}$. Then $\lim_{j\to\infty} F_j = [0,1]$. Indeed, for every subsequence $(F_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ of $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ and every sequence $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ with $x_k \in F_{j_k}$ for all $k \in \mathbb{N}$, we have $\lim_{k\to\infty} x_k \in [0,1]$, if the limit exists, since $[0,1]$ in closed in $\mathbb{R}$. On the other hand, let $x \in [0,1]$.
1. Case: $x < 1$.
Then put $x_j := x$ for almost all j, more precisely for all $j \geq \frac{1}{1-x}$. Then $x_j \in \left[0, 1 - \frac{1}{j}\right]$ for these j and $\lim_{j\to\infty} x_j = x$.
2. Case: $x = 1$.
Put $x_j := 1 - \frac{1}{j}$ for all $j \in \mathbb{N}$. Then $x_j \in F_j$ for all j and $\lim_{j\to\infty} x_j = 1$.

2) Let $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ be a sequence in $\mathbb{R}$ with $\lim\limits_{j\to\infty} y_j = \infty$. Then $\lim\limits_{j\to\infty} \{y_j\} = \varnothing$ in the metric of closed convergence. Indeed, let $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ be a sequence with $x_k \in \{y_{j_k}\}$ for a subsequence $(y_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Then $x_k = y_{j_k}$ and hence $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \infty$, so $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cannot have a limit. By the elementary rules of logic all conditions are fulfilled now.

Theorem 1.10. *The Borel-σ-algebra of the metric of closed convergence, i.e. the σ-algebra generated by the system of all open sets, is the Matheron-σ-algebra.*

Proof:
„$\supseteq$“ trivial, since the Matheron-σ-algebra is generated by the sets of the form $\mathcal{F}^C$, $C \in \mathcal{C}$, and these sets are open w.r.t. the metric of closed convergence.
„$\subseteq$“ skipped. □

Theorem 1.11. *(i) The metric space $\mathcal{F}$ is compact.*

(ii) The metric space $\mathcal{F}^{'} := \mathcal{F}\backslash\{\varnothing\}$ is locally compact.

(iii) Let $D \subseteq E$ be a countable dense subset. Then the system $\mathcal{D}$ of all finite resp. not empty finite subsets of D is dense in $\mathcal{F}$ resp. in $\mathcal{F}^{'}$.

(iv) The metric spaces $\mathcal{F}^{'}$ and $\mathcal{F}$ are separable.

For the proof of part (iii), we need the following lemma:

Lemma 1.12. *Let E be a locally compact, separable metric space. Then there is a sequence $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of compact sets with $C_i \subseteq C_{i+1}$ for all $i \in \mathbb{N}$ and $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i = E$.*

Proof: skipped. □

Proof of Theorem 1.11: (i) We will show that every open cover $\{U_k \mid k \in K\}$ of $\mathcal{F}$ contains a finite subcover. Since every set U_k is of the form $\bigcup_{i\in I_k} \mathcal{F}^{C_{i,k}} \;\cup\; \bigcup_{i\in J_k} \mathcal{F}_{G_{i,k}}$, we have

$$\bigcup_{k\in K}\left(\bigcup_{i\in I_k} \mathcal{F}^{C_{i,k}} \cup \bigcup_{i\in J_k} \mathcal{F}_{G_{i,k}}\right) = \mathcal{F},$$

and thus

$$\bigcap_{k\in K}\bigcap_{i\in I_k} \mathcal{F}_{C_{i,k}} \cap \bigcap_{k\in K}\bigcap_{i\in J_k} \mathcal{F}^{G_{i,k}} = \varnothing.$$

Putting $G := \bigcup_{k\in K}\bigcup_{i\in J_k} G_{i,k}$, this yields

$$\bigcap_{k\in K}\bigcap_{i\in J_k} \mathcal{F}_{C_{i,k}} \cap \mathcal{F}^{G} = \varnothing.$$

Now $G^C \in \mathcal{F}^G$ and therefore $G^C \notin \bigcap_{k\in K}\bigcap_{i\in I_k} \mathcal{F}_{C_{i,k}}$. Hence there is $k_0 \in K, i_0 \in J_{k_0}$ with $G^C \notin \mathcal{F}_{C_{i_0,k_0}}$. Thus $C_{i_0,k_0} \subseteq \bigcup_{k\in K}\bigcup_{i\in J} G_{i,k}$. Hence there is a finite subcover $\{G_{i,k} \mid i \in \tilde{J}_k, k \in \tilde{K}\}$. Assume there is $F \in \bigcap_{k\in\tilde{K}}\bigcap_{i\in\tilde{J}_k} \mathcal{F}^{G_{i,k}} \cap \mathcal{F}_{C_{i_0,k_0}}$. This means $F \cap C_{i_0,k_0} \neq \varnothing$, but $F \cap G_{i,k} = \varnothing$, $k \in \tilde{K}, i \in \tilde{J}_k$, which is impossible. Therefore $\mathcal{F}_{C_{i_0,k_0}} \cap \bigcap_{k\in\tilde{K}}\bigcap_{i\in\tilde{J}_k} \mathcal{F}^{G_{j,k}} = \varnothing$ and thus

$$\mathcal{F}^{C_{i_0,k_0}} \cup \bigcup_{k\in\tilde{K}}\bigcup_{i\in\tilde{J}_k} \mathcal{F}_{G_{j,k}} = \mathcal{F}.$$

Hence

$$\bigcup_{k\in\tilde{K}\cup\{k_0\}} U_k = \mathcal{F}.$$

So F is compact.
(ii) skipped.
(iii) Let $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of compact sets with $C_n \subseteq C_{n+1}$ and $\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n = E$ (cf. Lemma 1.12). For each $n \in \mathbb{N}$ the system $\{B_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in D\}$ forms an open over of C_n. Hence there is a finite subcover $\{B_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in D_n\}$ for some finite set $D_n \subseteq D$.

Let $F \in \mathcal{F}$. We will construct a sequence $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ converging to F in the metric of closed convergence. For $\epsilon > 0$ we put

$$F_\epsilon := \{y \in E \mid \text{ there is } x \in E \text{ with } d(x,y) \leq \epsilon\}.$$

Now put

$$F_m := F_{\oplus\frac{1}{m}} \cap D_m.$$

Clearly, F_m is a finite subset of D and only empty, if F is empty. Let us show $\lim_{i\to\infty} F_i = F$. Let $x \in F$. Then $x \in C_i$ for all sufficiently large $i \in \mathbb{N}$, hence $d(x, y_i) < \frac{1}{i}$ for some $y_i \in D_i$. Since $y_i \in F_{\oplus\frac{1}{i}}$, we have $y_i \in F_i$. Clearly, $\lim_{i\to\infty} y_i = y$.
On the other hand, let $(F_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ be a subsequence of $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ and let $x_k \in F_{i_k}$ and assume that the sequence $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converges to a limit x. Then there is a sequence $y_k \in F$ with $d(x_k, y_k) \leq \frac{1}{i_k} \leq \frac{1}{k}$. Clearly, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converges to x as well and hence $x \in F$, since F is closed.
(iv) It remains to show that the system $\mathcal{D}$ is countable. Choose an enumeration $\{d_1, d_2, \dots\}$ of D and let $\mathcal{D}_n$ denote the power set of $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. Then $\mathcal{D}_n$ is finite for all n and $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_n = \mathcal{D}$. □

Definition 1.13. *Let M be a metric space and $\varphi : M \to \mathcal{F}$ be a map.*

(a) The map φ is called upper semicontinuous if $\varphi^{-1}(\mathcal{F}^C)$ is open (in M) for all $C \in \mathcal{C}$.

(b) The map φ is called lower semicontinuous if $\varphi^{-1}(\mathcal{F}_G)$ is open (in M) for all $G \in \mathcal{G}$.

Remark: A map $\varphi : M \to \mathcal{F}$ from a measurable space M is continuous if and only if it is both upper semicontinuous and lower semicontinuous.
„$\Rightarrow$“ is clear
„$\Leftarrow$“ Any open set U in $\mathcal{F}$ is of the form

$$\bigcup_{i\in I} \mathcal{F}^{C_i} \cup \bigcup_{i\in J} \mathcal{F}_{G_i}$$

so

$$\varphi^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} \varphi^{-1}(\mathcal{F}^{C_i}) \cup \bigcup_{i\in J} \varphi^{-1}(\mathcal{F}_{G_i}).$$

If φ is both upper semicontinuous and lower semicontinuous, then all set $\varphi^{-1}(\mathcal{F}^{C_i}), \varphi^{-1}(\mathcal{F}_{G_i})$ are open sets in M. Therefore $\varphi^{-1}(U)$ is open. Hence φ is continuous.

Definition 1.14. *Let $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ be a sequence in $\mathcal{F}$.*

(a) Then the union of all accumulation points of $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ is called the limes superior of $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ and is denoted by $\limsup_{i\to\infty} F_i$.

(b) The intersection of all accumulation points of $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ is called the limes inferior of $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ and is denoted by $\liminf_{i\to\infty} F_i$.

Theorem 1.15. *Let $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ be a sequence in $\mathcal{F}$.*

(a) $\limsup_{i\to\infty} F_i = \{x \in E \mid \text{for all } \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap F_i \neq \varnothing \text{ for infinitly many } i \in \mathbb{N}\}$

(b) $\liminf_{i\to\infty} F_i = \{x \in E \mid \text{for all } \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap F_i \neq \varnothing \text{ for almost all } i \in \mathbb{N}\}$

Both $\limsup_{i\to\infty} F_i$ and $\liminf_{i\to\infty} F_i$ are closed.

Proof: skipped. □

Theorem 1.16. *Let M be a separable metric space and $\varphi : M \to \mathcal{F}$ be a map.*

(a) The map φ is upper semicontinuous if and only if $\limsup_{i\to\infty} \varphi(t_i) \subseteq \varphi(t)$ for any convergent sequence $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in M with limit t.

(b) The map φ is lower semicontinuous if and only if $\liminf_{i\to\infty} \varphi(t_i) \supseteq \varphi(t)$ for any convergent sequence $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in M with limit t.

Proof: skipped. $\square$

Theorem 1.17. *Let $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ be a sequence in $\mathcal{F}$ and let $F \in \mathcal{F}$.*

(a) Then the following are equivalent:

(a.i) $\limsup_{j\to\infty} F_j \subseteq F$.

(a.ii) For all $C \in \mathcal{C}$ with $F \cap C = \varnothing$ we have $F_j \cap C = \varnothing$ for almost all $j \in \mathbb{N}$.

(a.iii) For any subsequence $(F_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ of $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ and any convergent sequence $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ with $x_k \in F_{j_k}$ for all $k \in \mathbb{N}$, we have $\lim_{k\to\infty} x_k \in F$.

(b) The following are also equivalent:

(b.i) $\liminf_{j\to\infty} F_j \supseteq F$.

(b.ii) For all $G \in \mathcal{G}$ with $F \cap G \neq \varnothing$ we have $F_j \cap G \neq \varnothing$ for almost all $j \in \mathbb{N}$.

(b.iii) For any $x \in F$ there is a sequence $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ with $x_j \in F_j$ for almost all j and $\lim_{j\to\infty} x_j = x$.

Proof: (a) The equivalence $(a.ii) \Leftrightarrow (a.iii)$ is already known.
$(a.iii) \Rightarrow (a.i)$ Let $x \in \limsup_{j\to\infty} F_j$. There is a strictly monotonically increasing sequence $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ such that $B_{\frac{1}{k}}(x) \cap F_{j_k} \neq \varnothing$. So choose a sequence $x_k \in B_{\frac{1}{k}}(x) \cap F_{j_k}$. We have $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ and so (a.iii) implies $x \in F$.
$(a.i) \Rightarrow (a.iii)$ Let $(F_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ and $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ be as in (a.iii), $x := \lim x_k$. Let $\epsilon > 0$. Then $x_k \in B_\epsilon(x)$ for infinitely many k and, in particular, $B_\epsilon(x) \cap F_{j_k} \neq \varnothing$. So $x \in \limsup_{j\to\infty} F_j$. By (a.i) we get $x \in F$.
(b) $(b.i) \Rightarrow (b.iii)$ Let $x \in F$. By (b.i) we have $x \in \liminf_{j\to\infty} F_j$, so for any $k \in \mathbb{N}$ there is a number N_k with $B_{\frac{1}{k}}(x) \cap F_j \neq \varnothing$ for all $j > N_k$. So for $j > N_1$ put $k_j := \min\{k \in \mathbb{N} \mid j < N_k\}$. Then for $k \leq k_j$ we have $B_{\frac{1}{k}} \cap F_j \neq \varnothing$. So we can choose a sequence $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ with $x_j \in B_{\frac{1}{k_j}}(x) \cap F_j$ for all $j > N_1$, since k could be chosen arbitrarily large, the sequence $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ is not bounded. Since it is monotonically increasing, $\lim_{j\to\infty} k_j = \infty$. So $\lim_{j\to\infty} x_j = x$.
$(b.iii) \Rightarrow (b.i)$ Let $x \in F$. By (b.iii) there is a sequence $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ with $\lim_{j\to\infty} x_j = x$ and $x_j \in F_j$ for almost all $j \in \mathbb{N}$. Let $\epsilon > 0$. Then $x_j \in B_\epsilon(x) \cap F_j$ for almost all j and, in particular, this intersection is non-empty. Hence $x \in \liminf_{j\to\infty} F_j$. $\square$

Theorem 1.18. *Let M be a metric space. A function $\varphi : M \to \mathcal{F}$ that is either upper semicontinuous or lower semicontinuous is measurable if M is equipped with the Borel-σ-algebra and $\mathcal{F}$ is equipped with the Matheron-σ-algebra.*

Proof: We have to show that $\varphi^{-1}(A)$ is a Borel set in M for all A in a generating system of the Matheron-σ-algebra. We know that it is generated by $\{\mathcal{F}^C \mid C \in \mathcal{C}\}$ and by $\{\mathcal{F}_G \mid G \in \mathcal{G}\}$. If φ is upper semicontinuous, then $\varphi^{-1}(\mathcal{F}^C)$, $C \in \mathcal{C}$, are open sets, while if φ is lower semicontinuous, then $\varphi^{-1}(\mathcal{F}_G)$, $G \in \mathcal{G}$, are open sets. Hence these sets are Borel sets. $\square$

Examples: 1) The map $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $(F, F') \mapsto F \cap F'$ is upper semicontinuous. Indeed, let $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ and $(F_i')_{i\in\mathbb{N}}$ be sequences in $\mathcal{F}$ converging to limits F resp. F'. We have to show $\limsup_{i\to\infty} F_i \cap F_i' \subseteq F \cap F'$. Choose a subsequence $(F_{i_k} \cap F_{i_k}')_{k\in\mathbb{N}}$ and a convergent sequence $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ with $x_k \in F_{i_k} \cap F_{i_k}'$. Since we assume that F and F' are the limits of $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ resp. $(F_i')_{i\in\mathbb{N}}$, we have $x := \lim_{k\to\infty} x_k \in F$ and $x \in F'$. Thus $x \in F \cap F'$, which completes the proof.
2) This map is not lower semicontinuous in $E = \mathbb{R}^d$. For example, choose $F_i = [0,1]^d$ for all $i \in \mathbb{N}$ and $F_i' = \left[\frac{1}{i} + 1, \frac{1}{i} + 2\right] \times [0,1]^{d-1}$ (the unit cube shifted by $1 + \frac{1}{i}$ in the direction of e_1, the first vector of the standard basis).

Then $\lim\limits_{i\to\infty} F_i = [0,1]^d$ and $\lim\limits_{i\to\infty} F_i^{'} = [1,2]\times[0,1]^{d-1}$. So $\lim\limits_{i\to\infty}\left(F_i\cap F_i^{'}\right) = \varnothing$, but $\lim\limits_{i\to\infty} F_i \cap \lim\limits_{i\to\infty} F_i^{'} = \{1\}\times[0,1]^{d-1}$. So the map is not lower semicontinuous.
3) For $E=\mathbb{R}^d$, the map $\partial : \mathcal{F}\to\mathcal{F},\ F\mapsto \operatorname{bd} F$ is lower semicontinuous. We will show that $\partial^{-1}(\mathcal{F}_G)$ is open in $\mathcal{F}$ for any $G\in\mathcal{G}$. There are $x_i, \epsilon_i, i\in I$, with $G=\bigcup_{i\in I} B_{\epsilon_i}(x_i)$. We have

$$\partial^{-1}(\mathcal{F}_G) = \partial^{-1}\big(\bigcup_{i\in I}\mathcal{F}_{B_{\epsilon_i}(x_i)}\big) = \bigcup_{i\in I}\partial^{-1}(\mathcal{F}_{B_{\epsilon_i}(x_i)});$$

so it suffices to show that $\partial^{-1}(\mathcal{F}_{B_\epsilon(x)})$ is open for $\epsilon>0, x\in E$. Indeed,

$$\begin{aligned}\partial^{-1}(\mathcal{F}_{B_\epsilon(x)}) &= \{F\in\mathcal{F}\mid \operatorname{bd} F\in\mathcal{F}_{B_\epsilon(x)}\}\\ &= \{F\in\mathcal{F}\mid \operatorname{bd} F\cap B_\epsilon(x)\neq\varnothing\}\\ &= \{F\in\mathcal{F}\mid F\cap B_\epsilon(x)\neq\varnothing \text{ and } F^C\cap B_\epsilon(x)\neq\varnothing\}\\ &= F_{B_\epsilon(x)}\cap\{F\in\mathcal{F}\mid B_\epsilon(x)\subseteq F\}^C.\end{aligned}$$

In order to show that $\{F\in\mathcal{F}\mid B_\epsilon(x)\subseteq F\}$ is closed, let $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ be a sequence in $\mathcal{F}$ with $B_\epsilon(x)\subseteq F_i$ for all $i\in\mathbb{N}$ that converges to a limit F. Clearly $B_\epsilon(x)\subseteq F$. Thus $\{F\in\mathcal{F}\mid B_\epsilon(x)\subseteq F\}$ is closed and therefore $\partial^{-1}(\mathcal{F}_{B_\epsilon(x)})$ is open.

1.3 Stationäre zufällige abgeschlossene Mengen

Lemma 1.19. *Sei Z eine $\mathbb{R}^d$-wertige zufällige abgeschlossene Menge und X ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvektor. Dann ist auch $Z+X$ eine zufällige abgeschlossene Menge.*

Beweis: Laut Aufgabe 1c) von Übungsblatt 2 ist $\mathbb{R}^d\to\mathcal{F},\ x\mapsto\{x\}$ stetig. Laut Aufgabe 1c) von Übungsblatt 3 ist $\mathcal{F}\times\mathcal{C}\to\mathcal{F},\ (F,C)\mapsto F+C$ halbstetig nach unten. Also ist $\mathcal{F}\times\mathbb{R}^d\to\mathcal{F},\ (A,x)\mapsto A+x$ halbstetig nach unten und somit messbar. □

Definition 1.20. *Eine zufällige abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^d$ heißt stationär, falls*

$$Z \overset{d}{=} Z+x,$$

für jedes $x\in\mathbb{R}^d$.

Lemma 1.21. *Eine zufällige abgeschlossene Menge Z ist genau dann stationär, wenn ihr Kapazitätsfunktional T_Z verschiebungsinvariant ist, d.h.*

$$T_Z(C) = T_Z(C+x),\ C\in\mathcal{C}, x\in\mathbb{R}^d.$$

Beweis: Es gilt $T_Z(C+x) = \mathbb{P}(Z\cap(C+x)\neq\varnothing) = \mathbb{P}\left((Z-x)\cap C\neq\varnothing\right) = T_{Z-x}(C)$. Also ist das Kapazitätsfunktional T_Z von Z genau dann verschiebungsinvariant, wenn alle zufälligen abgeschlossenen Menge $Z-x, x\in\mathbb{R}^d$, dasselbe Kapazitätsfunktional haben. Dies ist aber äquivalent dazu, dass sie dieselbe Verteilung haben, also dass Z stationär ist. □
Beispiel: Konstruktion einer stationären zufälligen abgeschlossenen Menge.
Seien A_z, $z\in\mathbb{Z}^d$, zufällige abgeschlossene Mengen. Falls

$$\tilde{Z} = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}^d} A_z + z$$

eine zufällige abgeschlossene Menge ist, dann ist

$$Z = \tilde{Z} + U$$

eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge, wobei $U\sim U\left([0,1]^d\right)$ unabhängig von $(A_z)_{z\in\mathbb{Z}^d}$ sei.
Sei $x\in\mathbb{R}^d$ und $C\in\mathcal{C}$. Wir zeigen

$$\mathbb{P}\left((Z+x)\cap C\neq\varnothing\right) = \mathbb{P}\left(Z\cap C\neq\varnothing\right)$$

Zerlege hierfür $x+U = y+R+S$ mit $y_i = \lfloor x_i \rfloor, i = 1, \ldots, d$, und $R_i \in \{0,1\}$, $S_i \in [0,1)$. Dann gilt $S \sim U\left([0,1]^d\right)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left((Z+x) \cap C \neq \varnothing\right) &= \mathbb{P}\left((\tilde{Z}+y+R+S) \cap C \neq \varnothing\right) \\
&= \sum_{r \in \{0,1\}^d} \mathbb{P}\left((\tilde{Z}+y+r+S) \cap C \neq \varnothing \mid r = R\right) \mathbb{P}\left(r = R\right) \\
&= \sum_{r \in \{0,1\}^d} \mathbb{P}\left(\Big(\bigcup_{z \in \mathbb{Z}^d} A_z + z + y + r + S\Big) \cap C \neq \varnothing \mid r = R\right) \mathbb{P}\left(r = R\right) \\
&= \sum_{r \in \{0,1\}^d} \mathbb{P}\left(\Big(\bigcup_{\tilde{z} \in \mathbb{Z}^d} A_{\tilde{z}-y-r} + \tilde{z} + S\Big) \cap C \neq \varnothing \mid r = R\right) \mathbb{P}\left(r = R\right) \\
&= \sum_{r \in \{0,1\}^d} \mathbb{P}\left(Z \cap C \neq \varnothing \mid r = R\right) \mathbb{P}\left(r = R\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \cap C \neq \varnothing\right),
\end{aligned}$$

da $((A_{\tilde{z}-y-r})_{\tilde{z} \in \mathbb{Z}^d}, U)$ die selbe Verteilung wie $((A_z)_{z \in \mathbb{Z}^d}, U)$ hat. Also ist Z stationär.

Betrachte nun Kegel $K_\alpha(x,v) := \{z \in \mathbb{R}^d \mid \langle z-x, v\rangle \geq ||z-x||\,||v|| \cos\alpha\}$ für $x \in \mathbb{R}^d, v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \alpha \in (0,\pi)$. Dies ist ein Kegel mit Spitze x, Achse in Richtung v und Winkel α zwischen der Achse und dem Rand.

Theorem 1.22. *Sei Z ein stationäre zufällige abgeschlossene Menge. Sei A das Ereignis $\{Z = \{\varnothing\}\}$ und*

$$B = \{Z \cap K_\alpha(x,v) \neq \varnothing \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d, v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \alpha \in (0,\pi)\}$$

das Ereignis "Z schneidet jeden Kegel". Dann ist $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass B mit dem Ereignis

$$\tilde{B} = \{Z \cap K_{\frac{1}{n}}(x,v) \neq \varnothing \text{ für } x \in \mathbb{Q}, v \in \mathbb{Q}^d \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}\}$$

übereinstimmt. Offensichtlich $B \subseteq \tilde{B}$. Sei also $\tilde{B}$ erfüllt und sei $x \in \mathbb{R}^d, v \in \mathbb{R}^d, \alpha \in (0,\pi)$, o.B.d.A $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\alpha}, \tilde{v} \in \mathbb{Q}^d$ mit $\langle v, \tilde{v}\rangle \geq ||v||\,||\tilde{v}|| \cos\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)$ und $\tilde{x} \in K_\alpha(x,v)$. Dann ist $K_{\frac{1}{n}}(\tilde{x},\tilde{v}) \subseteq K_\alpha(x,v)$ (Übung!).
Somit folgt $Z \cap K_{\frac{1}{n}}(\tilde{x},\tilde{v}) \neq \varnothing$ und B ist erfüllt.
Für feste $x \in \mathbb{Q}^d, v \in \mathbb{Q}^d \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachte nun die Ereignisse

$$C_m := \{Z \cap K_{\frac{1}{n}}(x+mv, v) \neq \varnothing\},\ m \in \mathbb{Z}.$$

Es gilt:

- $C_m \supseteq C_{m+1},\ m \in \mathbb{Z}$, und $\cup C_m = A^C$, also $\lim\limits_{m \to -\infty} \mathbb{P}(C_m) = \mathbb{P}(A^C)$
- Wegen der Stationarität von Z ist für $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_m) &= \mathbb{P}\left((Z-mv) \cap K_{\frac{1}{n}}(x,v) \neq \varnothing\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \cap K_{\frac{1}{n}}(x,v) \neq \varnothing\right) \\
&= \mathbb{P}(C_0)
\end{aligned}$$

Also $\mathbb{P}(C_m) = \mathbb{P}(A^C)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und wegen $C_0 \subseteq A^C$ folgt $\mathbb{P}\left(A^C \setminus C_0\right) = 0$.
Wir benennen C_0 in $C_{x,v,n}$ um und erhalten

$$B = \bigcap_{x,v,n} C_{x,v,n}.$$

Also

$$\mathbb{P}\left(A^C \backslash B\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x,v,n}\left(A^C \backslash C_{x,v,n}\right)\right) = 0,$$

d.h. $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$. □

Definition 1.23. *Sei Z eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge. Dann heißt $p := \mathbb{P}(0 \in Z)$ der Volumenanteil von Z.*

Theorem 1.24. *Für eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge Z in $\mathbb{R}^d$ gilt:*

(1) $p = \frac{\mathbb{E}\lambda_d(Z \cap B)}{\lambda_d(B)}$ *für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \lambda_d(B) < \infty$.*

(2) $p = T_Z(\{0\})$

Beweis: (1) Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\lambda_d(Z \cap B)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_Z(x)\mathbf{1}_B(x)dx\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_Z(x)\right]\mathbf{1}_B(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}\left(x \in Z\right)\mathbf{1}_B(x)dx \\ &= p \cdot \lambda_d(B).\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $\mathcal{F} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, (A, z) \mapsto \mathbf{1}_A(z)$ messbar ist, was wir unten zeigen werden.
(2) Es gilt

$$p = \mathbb{P}(0 \in Z) = \mathbb{P}(\{0\} \cap Z \neq \varnothing) = T_Z(\{0\}). \quad \square$$

Lemma 1.25. *Die Abbildung $\mathcal{F} \times E \to \mathbb{R}$, $(A, z) \mapsto \mathbf{1}_A(z)$ ist in jeden separablen, lokal-kompakten Raum halbstetig nach oben und deshalb messbar.*

Beweis: Beachte, dass eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ auf einem metrischen Raum M halbstetig nach oben heißt, falls

$$\limsup_{j\to\infty} f(x_j) \leq f(\lim_{j\to\infty} x_j)$$

für jede konvergente Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in M. Sei also $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$, die bzgl. einer Metrik der abgeschlossenen Konvergenz gegen $A \in F$ konvergiert, und $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E, die gegen $x \in E$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass aus $\limsup_{j\to\infty} \mathbf{1}_{A_j}(x_j) = 1$ bereits $\mathbf{1}_A(x) = 1$ folgt.
Aus $\limsup_{j\to\infty} \mathbf{1}_{A_j}(x_j) = 1$ folgt die Existenz einer Teilfolge $((A_{j_k}, x_{j_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ von $((A_j, x_j))_{j\in\mathbb{N}}$ mit $x_{j_k} \in A_{j_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es folgt $x = \lim_{k\to\infty} x_{j_k} \in A$ und somit $\mathbf{1}_A(x) = 1$. □

Definition 1.26. *Sei Z eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^d$. Dann heißt*

$$C : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathbb{P}\left(0 \in Z, x \in Z\right)$$

Kovarianz von Z.

Theorem 1.27. *Sei Z eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^d$. Dann gilt:*

(1) $C(0) = p$

(2) $C(-x) = C(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$

(3) $C(x) = 2p - T_Z(\{0, x\})$, $x \in \mathbb{R}^d$.

(4) $C(x)$ *ist der Volumenanteil von $Z \cap (Z - x)$.*

Beweis: (1) $C(0) = \mathbb{P}(0 \in Z) = p$

(2) $C(-x) = \mathbb{P}(0 \in Z, -x \in Z) = \mathbb{P}(0 \in Z - x, -x \in Z - x) = \mathbb{P}(x \in Z, 0 \in Z) = C(x)$

(3) $C(x) = \mathbb{P}(0 \in Z, x \in Z) = \mathbb{P}(0 \in Z) + \mathbb{P}(x \in Z) - \mathbb{P}(\{0 \in Z\} \cup \{x \in Z\}) = p + p - T_Z(\{0, x\})$

(4) Der Beweis der Messbarkeit wird übergangen.
$C(x) = \mathbb{P}(0 \in Z, x \in Z) = \mathbb{P}(0 \in Z \cap (Z - x))$ $\square$

Kapitel 2

Keim-Korn-Modelle

2.1 Einfache markierte Punktprozesse

Es bezeichne $\#M$ die Anzahl der Elemente einer Menge M.

Definition 2.1.

i. Eine zufällige abgeschlossene Menge X heißt (einfacher) Punktprozess, falls $\mathbb{P}\left(\#\left(X \cap C\right) < \infty\right) = 1$ für alle $C \in \mathcal{C}$.

ii. Seien E und M zwei lokalkompakte metrische Räume mit abzählbaren Basen. Eine zufällige abgeschlossene Menge X in $E \times M$ heißt (einfacher) markierter Punktprozess im Zustandsraum E mit Markenraum M, falls $\mathbb{P}\left(\#\left(X \cap (C \times M)\right) < \infty\right) = 1$ für jede kompakte Menge $C \subseteq E$.

Bem.

i. Ein unmarkierter Punktprozess ist der Spezialfall $\#M = 1$ eines markierten Punktprozesses.

ii. Ist M kompakt, dann ist X genau dann ein markierter Punktprozess im Zustandsraum E mit Markenraum M, wenn X ein Punktprozess in $E \times M$ ist. Aber es gibt (unabhängig davon, ob M kompakt ist) Unterschiede in der Anschauung: Bei einem Punktprozess in $E \times M$ sind beide Komponenten der Punkte gleichberechtigt. Beim einem markierten Punktprozessen in E mit Markenraum M gibt die erste Koordinate die Lage des Punktes im Raum an und die zweite ist eine Zusatzinformation.

Beispiel. *Für $E = [0, 3]$ und $M = [0, 1]$ ist eine Realisierung eines Punktprozesses X durch $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, 1\right)\right\}$ gegeben.*

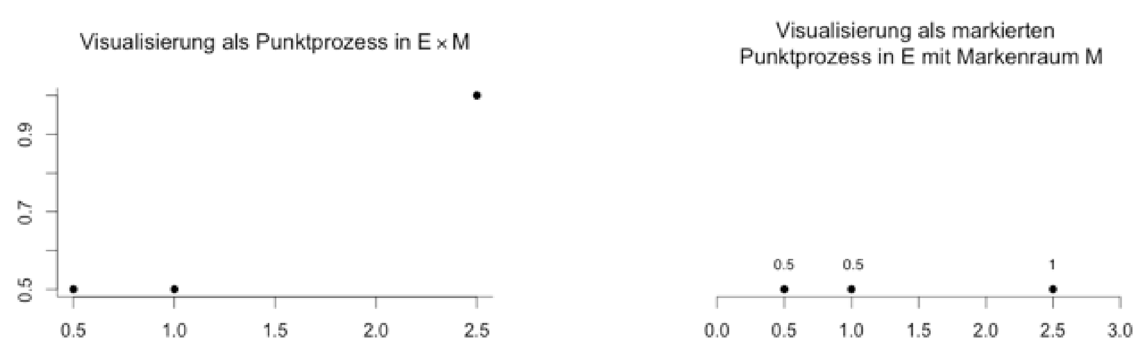

Abbildung 2.1: Visualisierung

Theorem 2.2. *Sei X ein Punktprozess auf E mit Markenraum M. Dann gibt es Folgen $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen in E bzw. M, so dass*

$$X = \{(\xi_1,\mu_1),\dots,(\xi_k,\mu_k)\},\ \textit{falls}\ \#X = k,$$
$$X = \{(\xi_1,\mu_1),(\xi_2,\mu_2),\dots\},\ \textit{falls}\ \#X = \infty,$$

fast sicher.

ohne Beweis.

Definition 2.3. *Das Intensitätsmaß eines markierten Punktprozesses X in E mit Markenraum M ist das durch*

$$\Lambda(B) = \mathbb{E}\,\#\,(X\cap B)\,,\ \ B\in\mathcal{B}\,(E\times M)\,,$$

definierte Maß.

Der Nachweis, dass $M\mapsto \#M$ messbar ist, wird übergangen.

Definition 2.4. *Ein markierter Punktprozess X auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum M heißt stationär, falls*

$$X+v \overset{d}{=} X,\ \ v\in\mathbb{R}^d,$$

wobei $X+v := \{(x_1+v,x_2)\in\mathbb{R}^d\times M \mid (x_1,x_2)\in X\}$.

Ein Maß μ auf E heißt lokal-endlich, falls $\mu(C)<\infty$ für alle $C\in\mathcal{C}$.

Theorem 2.5. *Sei X ein stationärer markierter Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum M. Sei Λ das Intensitätsmaß von X. Falls Λ lokal-endlich ist, dann gibt es eine Konstante $\gamma\geq 0$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf M, so dass $\Lambda = \gamma\cdot\lambda_d\otimes\mathbb{Q}$.*
Falls $\gamma>0$, dann ist $\mathbb{Q}$ eindeutig bestimmt.

Definition 2.6. *In der Situation von Theorem 2.5 heißt γ die Intensität von X und $\mathbb{Q}$ die Markenverteilung von X. Eine Zufallsvariable auf M mit Verteilung $\mathbb{Q}$ heißt typische Marke von X.*

Lemma 2.7. *Sei μ ein lokal-endliches verschiebungsinvariantes Maß auf $\mathbb{R}^d$, d.h. $\mu\,(A+v)=\mu\,(A)\,,\ A\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right),$ $v\in\mathbb{R}^d$. Dann gibt es eine Konstante $c\geq 0$ mit $\mu\,(A) = c\cdot\lambda_d\,(A)$ für alle $A\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right).$*

Ohne Beweis.
Beweis des Satzes: Sei $A\in\mathcal{B}\,(M)\,.$ Dann ist μ_A, definiert durch $\mu_A(B) := \Lambda(B\times A),\ B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$, ein Maß, das lokal-endlich und wegen

$$\begin{aligned}\mu_A\,(B+v) &= \mathbb{E}\#\,(X\cap((B+v)\times A))\\ &= \mathbb{E}\#\,((X-v)\cap(B\times A))\\ &= \mathbb{E}\#\,(X\cap(B\times A))\\ &= \mu_A(B)\end{aligned}$$

translationsinvariant ist. Wegen dem Lemma gibt es also eine Konstante $c_A\geq 0$ mit $\mu_A(B) = c_A\lambda_d(B)$, $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Die Funktion $\mathcal{B}(M)\to\mathbb{R},\ A\mapsto c_A$ ist wegen $c_A = \lambda_d\left([0,1)^d\times A\right)$ ein endliches Maß. Also ist für $\gamma := c_A$ $\mathbb{Q}(A) := \frac{1}{\gamma}c_A$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und es gilt $\Lambda\,(B\times A) = \gamma\cdot\lambda_d(B)\cdot\mathbb{Q}(A)$ für $A\in\mathcal{B}(M),\ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, d.h. $\Lambda = \gamma\cdot\lambda_d\otimes\mathbb{Q}$. □

Definition 2.8. *Ein markierter Punktprozess X in E mit Markenraum M heißt Poissonprozess, wenn $\#(X\cap B)$ für alle $B\in\mathcal{B}(E\times M)$ Poisson-verteilt ist. Hierbei betrachten wir Zufallsvariablen N mit $\mathbb{P}\,(N=0)=1$ oder $\mathbb{P}\,(N=\infty)=1$ als Poisson-verteilt.*

Definition 2.9.

i. Sei μ ein Maß auf einem messbaren Raum $(\Omega,\mathcal{A})$. Ein Punkt $x\in\Omega$ mit $\mu(\{x\})>0$ heißt Atom von μ.

ii. Ein Maß heißt atomfrei, falls es kein Atom hat.

Lemma 2.10. *Das Intensitätsmaß Λ eines Poissonprozesses X ist atomfrei und lokal-endlich.*

Beweis: Sei $(x_1, x_2) \in E \times M$. Es ist $\mathbb{P}\left(\#\left(X \cap \{(x_1, x_2)\}\right) \geq 2\right) = 0$, also $\mathbb{P}\left(\#\left(X \cap \{(x_1, x_2)\}\right) = 0\right) = 1$, weil $X \cap \{(x_1, x_2)\}$ Poisson-verteilt ist. Somit $\Lambda(\{x_1, x_2\}) = \mathbb{E}\#(X \cap \{(x_1, x_2)\}) = 0$. Sei $C \subseteq E \times M$ kompakt. Dann ist $\mathbb{P}(\#(X \cap C) < \infty) = 1$. Weil $\#(X \cap C)$ Poisson-verteilt ist, folgt $\Lambda(C) = \mathbb{E}\#(X \cap C) < \infty$. □

Theorem 2.11. *Sei Λ ein atomfreies Maß auf $E \times M$ mit $\Lambda(C \times M) < \infty$ für $C \in \mathcal{C}$. Dann gibt es einen Poissonprozess X auf E mit Markenraum M, der Intensitätsmaß Λ hat.*

Ohne Beweis.

Theorem 2.12. *Seien X und Y zwei Poissonprozesse auf E mit Markenraum M, die dasselbe Intensitätsmaß haben. Dann ist $X \stackrel{d}{=} Y$.*

Beweis: Sei $C \in \mathcal{C}$. Das Kapazitätsfunktional von X ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_X(C) = \mathbb{P}(X \cap C \neq \varnothing) &= \mathbb{P}(\#(X \cap C) \geq 1) \\ &= 1 - \exp\{-\mathbb{E}\#(X \cap C)\} \\ &= 1 - \exp\{-\Lambda(C)\}. \end{aligned}$$

Da die gleiche Rechnung für das Kapazitätsfunktional von Y gibt, folgt $T_X(C) = T_Y(C)$ für alle $C \in \mathcal{C}$ und somit $X \stackrel{d}{=} Y$. □

Theorem 2.13. *Sei X ein Poissonprozess in E mit Markenraum M. Dann sind $\#(X \cap A_1), \ldots, \#(X \cap A_n)$ unabhängig für disjunkte Borel-Mengen $A_1, \ldots, A_n \subseteq E \times M$.*

Beweis: Wir konstruieren einen weiteren Prozess Y, für den diese Zufallsvariablen offensichtlich unabhängig sind und zeigen, dass dieser die selbe Verteilung wie X hat. Sei Λ das Intensitätsmaß von X und $A_{n+1} := (E \times M) \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j$.
Seien $Y_1, \ldots, Y_{n+1}$ unabhängige Kopien von X. Definiere

$$Y = (Y_1 \cap A_1) \cup \cdots \cup (Y_{n+1} \cap A_{n+1}).$$

Dann sind $\#(Y \cap A_1), \ldots, \#(Y \cap A_{n+1})$ unabhängig. Es bleibt zu zeigen, dass Y die gleiche Verteilung wie X hat, also ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß Λ ist.
Für $B \in \mathcal{B}(E \times M)$ ist

$$\#(Y \cap B) = \sum_{i=1}^{n+1} \#(Y \cap B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \#(Y_i \cap (B \cap A_i))$$

eine Summe von unabhängigen Poisson-verteilten Zufallsvariablen. Diese ist Poisson-verteilt. Weiter ist das Intensitätsmaß von Y gegeben durch

$$\mathbb{E}\#(Y \cap B) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}\#(Y_i \cap (B \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n+1} \Lambda(B \cap A_i) = \Lambda(B). \qquad \square$$

Definition 2.14. *Sei X ein Punktprozess auf E mit Markenraum M. Dann heißt $X^0 := \{x \mid (x, m) \in X\}$ der zu X gehörige unmarkierte Punktprozess.*

Theorem 2.15. *Sei X ein Poissonprozess auf E mit Markenraum M. Dann ist der unmarkierte Punktprozess X^0 ein Poissonprozess auf E.*

Beweis: Die Messbarkeit folgt daraus, dass $X^0(\omega) \in \mathcal{F}^C \iff X(\omega) \in \mathcal{F}^{C \times M}$ für jede kompakte Menge $C \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt und M eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist.
Für $B \in \mathcal{B}(E)$ ist $\#(X^0 \cap B) = \#(X \cap (B \times M))$ Poisson-verteilt und, falls B kompakt ist, f.s. endlich. □

2.2 Keim-Korn-Modelle

Idee: Für einen markierten Punktprozess $\tilde{X}$ auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum $\mathcal{F}$ heißt die zufällige abgeschlossene Menge

$$Z = \bigcup_{(y,A)\in\tilde{X}} A + y$$

Keim-Korn-Modell. Der unmarkierte Punktprozess $\tilde{X}^0$ heißt Keimprozess und die Mengen $A + y$ mit $(y, A) \in \tilde{X}$ heißen Körner.

Beispiel. *Der markierte Punktprozess $\tilde{X}$ sei gegeben durch*

$$\tilde{X} = \{(z, B(-z, U_z)) \mid z \in \mathbb{Z}^d\}$$

wobei $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d \mid ||x - y|| \leq r\} = \operatorname{cl} B_r(x)$ bezeichnet und $U_z, z \in \mathbb{Z}^d$, eine Folge unabhängiger $U(0,1)-$verteilter Zufallsvariablen ist. Dann ist $\bigcup_{(z,A)\in X} A+z = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}^d} B(-z, U_z)+z = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}^d} B(0, U_z)$. Dies ist mit Wkt. 1 der offene Ball $B_1(0)$. Es ist nämlich $\mathbb{P}(U_z < 1 \text{für alle } z \in \mathbb{Z}^d) = 1$ und $\mathbb{P}(U_z < r \text{für alle } z \in \mathbb{Z}^d) = \lim_{n\to\infty} r^n = 0$ für jedes $r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$.

Lemma 2.16. *Seien $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{F}$ abzählbar viele abgeschlossene Mengen. Falls jede kompakte Menge $C \in \mathcal{C}$ nur von endlich vielen F_j, $j \in \mathbb{N}$, geschnitten wird, dann ist $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_j$ abgeschlossen.*

Beweis: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $F := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_j$, die gegen $x \in E$ konvergiert. Nun gibt es eine kompakte Menge $C \subseteq E$ mit $x \in \operatorname{int} C$. Also $x_k \in C$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$ und somit gibt es eine endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ mit $x_k \in \bigcup_{j\in I} F_j$. Da $\bigcup_{j\in I} F_j$ abgeschlossen ist, folgt $x \in \bigcup_{j\in I} F_j \subseteq F$. □

Lemma 2.17. *Sei $(Z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zufälligen abgeschlossenen Mengen, für die $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Z_j$ sicher abgeschlossen ist. Dann ist $Z := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Z_j$ eine zufällige abgeschlossene Menge.*

Beweis:
Sei $C \in \mathcal{C}$. Dann ist

$$\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) \in \mathcal{F}^C\} = \{\omega \in \Omega \mid \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Z_j(\omega) \cap C = \emptyset\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid Z_j(\omega) \in \mathcal{F}^C\}.$$

Dies ist eine abzählbare Vereinigung messbarer Mengen und daher messbar. □

Theorem 2.18. *Sei $\tilde{X} = \{(\xi_i, Z_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ ein stationärer Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum $\mathcal{F}$. Falls $\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0 + K)] < \infty$ für ein $K \in \mathcal{C}$ mit inneren Punkten, $\operatorname{int} K \neq \varnothing$, wobei Z_0 die typische Marke von X bezeichnet, dann schneidet f.s. jede Menge $C \in \mathcal{C}$ nur endlich viele Körner $\xi_i + Z_i$. Insbesondere ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} \xi_i + Z_i$ (nach Abwandlung auf einer Nullmenge) eine zufällige abgeschlossene Menge.*

Beweis: Für $L := K^*$ ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\# \left(\tilde{X} \cap \{(x, z) \mid x + z \in \mathcal{F}_L\}\right) &= \Lambda\left(\{(x, z) \mid x + z \in \mathcal{F}_L\}\right) \\
&= \gamma \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\mathcal{F}_L}(x + Z_0)\right] dx \\
&= \gamma \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{L+Z_0^*}(x) dx\right] \\
&= \gamma \mathbb{E}\left[\lambda_d(L + Z_0^*)\right] \\
&= \gamma \mathbb{E}\left[\lambda_d(Z_0 + L^*)\right] \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Also wird L f.s. nur von endlich vielen Körnern $\xi_i + Z_i$ geschnitten. Wähle eine abzählbare, dichte Teilmenge $D \subseteq E$. Dann werden alle Mengen $L + d$, $d \in D$, f.s. nur von endlich vielen Körnern geschnitten. Weil aber L innere Punkte hat, wird jede Menge $C \in \mathcal{C}$ von endlich vielen Menge $L + d$, $d \in D$, überdeckt. Hieraus folgt die Behauptung. □

Wir setzen

(A) Jede Menge $C \in \mathcal{C}$ wird f.s. nur von endlich vielen Körnern $Z_i + \xi_i$ geschnitten,

da uns diese Bedingung noch öfters begegnen wird.
Ein Punktprozess auf $\mathcal{F}^{'}$ (dem System der nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen von E) heißt Partikelprozess.

Theorem 2.19. *Sei $\tilde{X} =$ ein markierter Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum $\mathcal{F}^{'}$. Dann ist*

$$X := \{A + y \mid (y, A) \in X\}$$

ein Partikelprozess, falls $\tilde{X}$ die Bedingung (A) *erfüllt.*

Lemma 2.20. *Für jede kompakte Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}^{'}$ gibt es eine kompakte Menge $C \subseteq E$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_C$.*

Ohne Beweis.
Beweis von Theorem 2.19:

i. Lokal-Endlichkeit. Wir müssen zeigen, dass in jeder kompakten Menge $A \subseteq \mathcal{F}^{'}$ nur endlich viele Punkte von X liegen. Wegen dem Lemma folgt dies aber aus (A).

ii. Aus der Messbarkeit von $\tilde{X}$ folgt die von (ξ_i, Z_i), daraus die von $Z_i + \xi_i$, daraus die von $\{Z_i + \xi_i\}$, daraus die von X. □

Theorem 2.21. *Sei X ein Punktprozess auf $\mathcal{F}^{'}$ und $c : \mathcal{F}^{'} \to \mathbb{R}^d$ eine messbare Abbildung. Falls $\{c(A) \mid A \in X\}$ f.s. lokal-endlich ist, dann ist*

$$\tilde{X} := \{(c(A), A - c(A)) \mid A \in X\}$$

ein Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum $\mathcal{F}^{'}$.

Beweis: klar. □

Bem.: Ist der Punktprozess X aus obigem Satz auf $\mathcal{C}^{'}$ konzentriert, so verlangt man meist, dass die Zentrumsfunktion $c : \mathcal{C}^{'} \to \mathbb{R}^d$ kovariant ist, d.h.

$$c(K + x) = c(K) + x, \;\; K \in \mathcal{C}^{'}, x \in \mathbb{R}^d.$$

Bsp.: Für eine nichtleere kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ gibt es einer eindeutig bestimmte Kugel kleinsten Radius, die K enthält. Ohne Beweis. Die Abbildung, die jeder Menge $K \in \mathcal{C}^{'}$ den Mittelpunkt dieser Kugel zuordnet, ist offensichtlich kovariant. Weiter ist die Abbildung messbar (ohne Beweis).

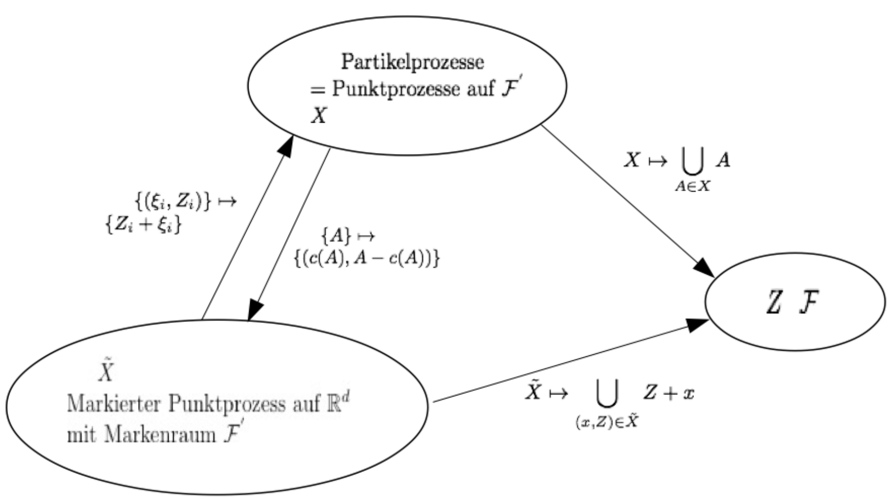

Abbildung 2.2: Partikelprozesse, die zugehörigen markierten Punktprozesse und Keim-Korn-Modelle

2.3 Das Boolesche Modell

Theorem 2.22. *Sei $c : \mathcal{C}' \to \mathbb{R}^d$ eine messbare, kovariante Abbildung.*

i. Sei $\tilde{X}$ ein Poissonprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum $\mathcal{C}_0$, der Bedingung (A) erfüllt. Dann ist $X := \{A + y \mid (y, A) \in X\}$ ein Poissonprozess auf $\mathcal{C}'$.

ii. Sei X ein Poissonprozess auf $\mathcal{C}'$. Dann ist

$$\tilde{X} := \{(c(A), A - c(A)) \mid A \in X\}$$

ein Poissonprozess auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}'$.

Beweis:

i. Sei $B \subseteq \mathcal{C}'$ eine Borel-Menge und

$$\alpha : \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}',\ (y, A) \mapsto A + y.$$

Wegen der Bijektivität von α ist $\#(X \cap B) = \#\alpha^{-1}(X \cap B)$ eine Poisson-verteilte Zufallsvariable.

ii. genauso. □

Definition 2.23. *Eine zufällige abgeschlossene Menge Z in $\mathbb{R}^d$ heißt stationäres Boolesches Modell, falls es einen stationären markierten Prozess $\tilde{X}$ auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum $\mathcal{C}'$ gibt, der ein Poissonprozess ist, so dass*

$$Z \overset{d}{=} \bigcup_{(y,A)\in\tilde{X}} A + y.$$

Definition 2.24. *Ein Partikelprozess X heißt stationär, falls*

$$X \overset{d}{=} X + v,\ \ v \in \mathbb{R}^d,$$

wobei $X + v = \{A + v \mid A \in X\}$.

Theorem 2.25. *Eine zufällige abgeschlossene Menge Z in $\mathbb{R}^d$ ist genau dann ein stationäres Boolesches Modell, wenn es einen stationären Poissonprozess X auf $\mathcal{C}'$ gibt, so dass*

$$Z \overset{d}{=} \bigcup_{A\in X} A.$$

Beweis: Sei $\tilde{X}$ wie aus der Definition des Booleschen Modells und $X = \{A+y \mid (y, A) \in \tilde{X}\}$. Dann ist X stationär und es gilt $Z \overset{d}{=} \bigcup_{A\in X} A$. Weiter ist Z ein Poissonprozess, da $\#(X \cap B) = \#(\tilde{X} \cap \alpha^{-1}(B))$ für $\alpha : \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}' \to \mathcal{C}'$, $(y, A) \mapsto A+y$. Da α nun nichtmehr bijektiv ist, ist diese Gleichheit nun nichtmehr trivial; wir übergehen ihren Nachweis.
Umgekehrt erfüllt für einen stationären Poissonprozess X auf $\mathcal{C}'$ der Prozess $\tilde{X} = \{(c(A), A - c(A)) \mid A \in X\}$ die Eigenschaften aus der Definition des Booleschen Modells (alle Eigenschaften außer der Lokal-Endlichkeit sind trivial; diese übergehen wir). □

Theorem 2.26. *Sei X ein Poissonscher Partikelprozess und $Z = \bigcup_{A\in X} A$. Dann gilt*

$$T_Z(C) = 1 - \exp\{-\Lambda(\mathcal{F}_C)\},\ C \in \mathcal{C},$$

wobei Λ das Intensitätsmaß von X ist.

Beweis:

$$\begin{aligned} T_Z(C) = \mathbb{P}\left(Z \cap C \neq \varnothing\right) &= 1 - \mathbb{P}(A \cap C = \varnothing \text{ für alle } A \in X) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A \notin \mathcal{F}_C \text{ für alle } A \in X) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\#(X \cap \mathcal{F}_C) = 0) \\ &= 1 - \exp\{-\Lambda(\mathcal{F}_C)\}, \end{aligned}$$

da $X \cap \mathcal{F}_C$ Poisson-verteilt mit Erwartungswert $\Lambda(\mathcal{F}_C)$ ist. □

Korollar. *Seien X und $X^{'}$ zwei Poissonsche Partikelprozesse. Dann ist*

$$\bigcup_{A\in X} A \stackrel{d}{=} \bigcup_{B\in X'} B$$

genau dann wenn $X \stackrel{d}{=} X^{'}$.

Beweis: „$\Leftarrow$“ klar.
„$\Rightarrow$“ Wenn die Verteilungen und damit die Kapazitätsfunktionale von $\bigcup_{A\in X} A$ und $\bigcup_{B\in X'} B$ übereinstimmen, stimmen laut Theorem 2.26 die Intensitätsmasse X und $X^{'}$ auf Mengen der Form $\mathcal{F}_C, C\in\mathcal{C}$ überein. Wir übergehen den Beweis, dass die Intensitätsmasse auf ganz $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ übereinstimmen. Da X und X' Poissonprozesse sind, stimmen ihre Verteilungen überein. $\square$

Korollar. *Seien $\tilde{X}$ und $\tilde{X}^{'}$ zwei stationäre Poissonprozesse auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum $\mathcal{C}_0$ für eine feste Zentrumsfunktion $c:\mathcal{C}^{'}\to\mathbb{R}^d$, die Bedingung (A) erfüllen. Dann ist*

$$\bigcup_{(y,A)\in\tilde{X}} A+y \stackrel{d}{=} \bigcup_{(z,B)\in\tilde{X}'} B+z$$

genau dann wenn $\tilde{X} \stackrel{d}{=} \tilde{X}^{'}$.

Die Verteilung eines Booleschen Modells Z legt also die Verteilung des definierenden markierten Poissonprozess $\tilde{X}$ fest. Daher können wir die Intensität γ dieses Prozesses auch Intensität von Z nennen und das typische Korn von Z als typische Marke von X definieren. (Dieses hängt von der Wahl der Zentrumsfunktion $c:\mathcal{C}^{'}\to\mathbb{R}^d$ ab.) Die Verteilung des typischen Korns heißt Kornverteilung.

Theorem 2.27. *Sei Z ein stationäres Boolesches Modell in $\mathbb{R}^d$ mit Intensität $\gamma>0$ und Kornverteilung $\mathbb{Q}$. Dann gilt*

$$T_Z(C) = 1-\exp\left(-\gamma\int_{\mathcal{C}_0}\lambda_d(A+C^*)\mathbb{Q}(dA)\right),\ \ C\in\mathcal{C}.$$

Beweis: Übung.

Korollar. *Sei Z ein stationäres Boolesches Modell auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensität $\gamma>0$ und Kornverteilung $\mathbb{Q}$. Dann gilt*

$$p = T_Z(\{0\}) = 1-\exp\big\{-\gamma\int_{\mathcal{C}_0}\lambda_d(A)\mathbb{Q}(dA)\big\}$$

und

$$C(x) = 2p - T_Z(\{0,x\}) = 1-2\exp\Big\{-\gamma\int_{\mathcal{C}_0}\lambda_d(A)\mathbb{Q}(dA)\Big\}+\exp\Big\{-\gamma\int_{\mathcal{C}_0}\lambda_d\left((A\cup(A+x))\right)\mathbb{Q}(dA)\Big\}.$$

Kapitel 3

Mittelwerte für zufällige abgeschlossene Mengen

3.1 Mittelwerte für das Boolesche Modell

Beispiel: Für das erwartete Volumen eines Booleschen Modells Z in einer kompakten Menge $W \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $0 < \lambda_d(W) < \infty$ gilt

$$\frac{\mathbb{E}\lambda_d(W \cap Z)}{\lambda_d(W)} = p = 1 - \exp\big[-\gamma \int_{\mathcal{C}_0'} V_d(A) d\mathbb{Q}(A)\big],$$

wobei γ die Intensität des Booleschen Modells ist und $\mathbb{Q}$ seine Kornverteilung.
Ziel dieses Abschnitts ist es, vergleichbare Formeln für andere geometrische Funktionale herzuleiten.
Der Konvexring $\mathcal{R}$ ist die Menge aller kompakten Mengen $L \subseteq \mathbb{R}^d$, die sich als Vereinigung

$$\bigcup_{i=1}^{N} K_i$$

von konvexen, kompakten Mengen $K_i \subseteq \mathbb{R}^d$ schreiben lassen. Das System der konvexen und kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ bezeichnen wir mit $\mathcal{K}$.

Lemma 3.1. *Für $L_1, L_2 \in \mathcal{R}$ ist auch $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{R}$ und $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{R}$.*

Beweis: Sei $L_1 = \bigcup_{i=1}^N K_i,\ K_1, \ldots, K_N \in \mathcal{K}$ und $L_2 = \bigcup_{i=N+1}^M K_i,\ K_{N+1}, \ldots, K_M \in \mathcal{K}$. Dann ist

$$L_1 \cup L_2 = \bigcup_{i=1}^{M} K_i \in \mathcal{R}$$

und

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{j=N+1}^{M} (K_i \cap K_j) \in \mathcal{R},$$

da $K_i \cap K_j \in \mathcal{K}$. □

Definition 3.2. *(i.) Ein Funktional $\varphi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ heißt additiv, falls $\varphi(K \cup L) + \varphi(K \cap L) = \varphi(K) + \varphi(L)$, $K, L \in \mathcal{R}$ und $\varphi(\varnothing) = 0$.*

(ii.) Ein Funktional heißt bedingt beschränkt, falls es auf allen Mengen der Form $\{L \in \mathcal{K} \mid L \subseteq K\}$, $K \in \mathcal{K}$, beschränkt ist.

Es sei $\mathcal{K}' := \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$. Für eine messbare, kovariante Funktion $c : \mathcal{K}' \to \mathbb{R}^d$ ist

$$\mathcal{K}_0 := \{K \in \mathcal{K}' \mid c(K) = 0\}$$

das System der nicht-leeren, zentrierten, kompakten und konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$.

Theorem 3.3. *Sei Z ein stationäres Boolesches Modell in $\mathbb{R}^d$ mit konvexen Körnern, d.h. die Verteilung $\mathbb{Q}$ des typischen Korns sei auf $\mathcal{K}_0$ konzentriert. Sei $W \in \mathcal{K}'$ und $\varphi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ ein messbares, additives und bedingt beschränktes Funktional. Dann ist*

$$\mathbb{E}|\varphi(Z \cap W)| < \infty$$

und

$$\mathbb{E}\varphi(Z \cap W) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\gamma^k \int_{\mathcal{K}_0} \dots \int_{\mathcal{K}_0} \phi(W; K_1, \dots, K_k)\mathbb{Q}(dK_1)\dots\mathbb{Q}(dK_k),$$

wobei γ die Intensität des Booleschen Modells ist und

$$\phi(W; K_1, \dots, K_k) = \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \varphi(W \cap (K_1 + x_1) \cap \dots \cap (K_k + x_k))(\lambda_d)^k(d(x_1, \dots, x_k)).$$

ohne Beweis.

Definition 3.4. *Für $L \in \mathcal{R}$ bezeichne*

$$M(L) := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\lambda_d(L_{\oplus\epsilon} \backslash L)}{\epsilon}$$

die Minkowski-Oberfläche, wobei $L_{\oplus\epsilon} := \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|x - y\| \leq \epsilon$ für ein $x \in L\}$.

Bem.:

(1) Der Limes existiert für alle $L \in \mathcal{R}$ (ohne Beweis).

(2) Die Minkowski-Oberfläche gibt ziemlich gut das wieder, was man anschaulich als Oberfläche bezeichnen würde. Bei niederdimensionalen Teilen L wird hier aber der zweifache Flächeninhalt gezählt.

Bsp.: Die Menge $L = [0,1]^2 \cup [-1,0] \times \{0\} \subseteq E$ hat Minkowski-Oberfläche $M(L) = 6$.

Lemma 3.5. *Die Minkowski-Oberfläche $M : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ ist messbar, bedingt bschränktes und additiv.*

ohne Beweis.

Lemma 3.6. *Es gilt*

(i.) $\int_{\mathbb{R}^d} \lambda_d(K \cap (L + x))dx = \lambda_d(K)\lambda_d(L),\ \ K, L \in \mathcal{C},$

(ii.) $\int_{\mathbb{R}^d} M(K \cap (L + x))dx = \lambda_d(K)M(L) + M(K)\lambda_d(L),\ \ K, L \in \mathcal{R}.$

Beweis:

(i.)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \lambda_d(K \cap (L + x))dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_K(y)\mathbf{1}_{L+x}(y)dy\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_K(y) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_L(y - x)dx\, dy = \lambda_d(K)\lambda_d(L)$$

(ii.) Wie verwenden ohne Beweis, dass

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\big(\lambda_d(K_{\oplus\epsilon} \cap L_{\oplus\epsilon}) - \lambda_d((K \cap L)_{\oplus\epsilon})\big) = 0,$$

für $K, L \in \mathcal{R}$. Nun gilt

$$\begin{aligned} M(K \cap (L + x)) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\lambda_d((K \cap (L + x))_{\oplus\epsilon}) - \lambda_d(K_{\oplus\epsilon} \cap (L + x)_{\oplus\epsilon})}{\epsilon} \\ &+ \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\lambda_d(K_{\oplus\epsilon} \cap (L_{\oplus\epsilon} + x)) - \lambda_d(K \cap (L + x))}{\epsilon} \end{aligned}$$

Somit folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz - wir übergehen den Nachweis, dass dessen Voraussetzungen erfüllt sind - sowie aus Teil (i), dass

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} M(K\cap(L+x))\,dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}^d}\lambda_d(K_{\oplus\epsilon}\cap(L_{\oplus\epsilon}+x))-\lambda_d(K\cap(L+x))\,dx\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}[\lambda_d(K_{\oplus\epsilon})\lambda_d(L_{\oplus\epsilon})-\lambda_d(K)\lambda_d(L)]\\ &= \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\lambda_d(K_{\oplus\epsilon})\lambda_d(L_{\oplus\epsilon})\right)|_{\epsilon=0}\\ &= M(K)\lambda_d(L)+\lambda_d(K)M(L). \qquad \square\end{aligned}$$

Korollar: Für $K_0,\dots,K_k\in\mathcal{R}$ gilt

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^k} M(K_0\cap(K_1+x_1)\cap\dots\cap(K_k+x_k))(\lambda_d)^k d(x_1,\dots,x_k)=\sum_{i=0}^k M(K_i)\prod_{j\neq i}\lambda_d(K_j).$$

Beweis: Induktives Anwenden des Satzes.
Korollar: Sei Z ein stationäres Boolesches Modell in $\mathbb{R}^d$ mit konvexen Körnern. Sei $W\in\mathcal{K}'$. Dann ist

$$\mathbb{E}M(W\cap Z)=\lambda_d(W)\gamma\mathbb{E}[M(Z_0)]e^{-\gamma\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]}+M(W)(1-e^{-\gamma\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]}),$$

wobei Z_0 das typische Korn von Z ist und γ die Intensität.
Beweis: Obiger Satz liefert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M(Z\cap W)] &= \sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\gamma^k\int_{\mathcal{K}_0}\dots\int_{\mathcal{K}_0}\int_{(\mathbb{R}^d)^k} M(W\cap(K_1+x_1)\cap\dots(K_k+x_k))\lambda(d(x_1,\dots,x_k))\\ &\qquad\qquad \mathbb{Q}(dK_1)\dots\mathbb{Q}(dK_k)\\ &= \sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\gamma^k\int_{\mathcal{K}_0}\dots\int_{\mathcal{K}_0}\Big[M(W)\prod_{j=1}^k\lambda_d(K_j)\ +\ \sum_{i=1}^k M(K_i)\lambda_d(W)\prod_{j\neq i}\lambda_d(K_j)\Big]\\ &\qquad\qquad \mathbb{Q}(dK_1)\dots\mathbb{Q}(dK_k)\\ &= -M(W)\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\gamma^k(\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)])^k\quad+\quad\lambda_d(W)\mathbb{E}[M(Z_0)]\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\gamma^k k(\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)])^{k-1}\\ &= M(W)\cdot(1-\exp\{-\gamma\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]\})\quad+\quad\lambda_d(W)\mathbb{E}[M(Z_0)]\gamma\exp\{-\gamma\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]\}. \qquad\square\end{aligned}$$