Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

ulm university universität uulm

Sommersemester 2016

Stochastik I - Übungsblatt 10

Abgabe am 21.6.2016 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (2 + 2 + 3 + 3 Punkte)

Eine Brauerei hat beobachtet, dass die Abfüllmenge von Bierflaschen (in ml) zufällig ist. Man nimmt an, dass die Abweichung der abgefüllten Menge von der Normmenge als eine $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable angesehen werden kann. Für 13 unabhängig ausgewählte Bierflaschen ergaben sich folgende Abweichungen von der Normmenge:
$-0.014, -0.013, -0.014, -0.031, -0.01, 0.016, 0.008, -0.006, -0.019, 0.017, 0.003, -0.021, 0.012$

(a) Prüfe mit einem zweiseitigen statistischen Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass die erwartete Abfüllmenge nicht von der Normmenge abweicht gegen die Alternative, dass die erwartete Abfüllmenge von der Normmenge abweicht. Nimm an, dass $\sigma = 0.01$ bekannt ist.

(b) Sei nun -0.008 der tatsächliche Wert von μ. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art bei dem in (a) verwendeten Test?

(c) Konstruiere einen einseitigen statistischen Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ für die Hypothese, dass die erwartete Abfüllmenge im Mittel nicht von der Normmenge abweicht gegen die Alternative, dass die erwartete Abfüllmenge im Mittel kleiner als die Normmenge ist. Nimm an, dass $\sigma = 0.01$ bekannt ist. Die Nullhypothese soll abgelehnt werden, wenn die Testgröße zu kleine Werte annimmt.

(d) Nun soll die Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen die Alternative $H_1 : \mu > \mu_0$ zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ bei unbekannter Varianz getestet werden, wobei $\mu_0 \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl ist. Hierzu soll der Test

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{1}_{(t_{n-1,1-\alpha}, \infty)} \left(\frac{\overline{x}_n - \mu_0}{s_n / \sqrt{n}} \right)$$

betrachtet werden.
Zeige, dass der Test φ unverfälscht ist, die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art jedoch beliebig nahe an $1 - \alpha$ liegen kann.

Bitte wenden.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, bestehend aus i.i.d Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \mathrm{Bin}(1,p)$ mit $p \in [0,1]$ und $n = 10$. Weiter sei $\Theta_0 = [0, 0.6]$ und $\Theta_1 = (0.6, 1]$. Zur Überprüfung der Nullhypothese $H_0 : p \in \Theta_0$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : p \in \Theta_1$ soll der Test $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{1}_{(0.7,1]}(\overline{x}_n)$ verwendet werden.

(a) Wie viele Einsen darf eine Realisierung der Stichprobe höchstens enthalten, damit H_0 nicht verworfen wird?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art, wenn $p = 0.4$ ist?

(c) Für welches $p \in \Theta_0$ ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art maximal?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, falls $p = 0.75$?

(e) Skizziere die Gütefunktion des Tests φ. (Einzelne Werte der Gütefunktion können mit **R** berechnet werden.)

Aufgabe 3 (2 + 3 Punkte)

Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, bestehend aus i.i.d Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \mathrm{U}(0, \theta)$ mit $\theta \in \Theta = (0, 1)$. Gegeben sei der Test

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \max\{x_1, \ldots, x_n\} > \theta_0 \text{ oder } \max\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \theta_0 \alpha^{1/n}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für die Nullhypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : \theta \neq \theta_0$ für ein $\alpha \in (0, 1)$.

(a) Zeige, dass der Test φ das Signifikanzniveau α besitzt.

(b) Zeige, dass der Test φ konsistent ist.