Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2016

Stochastik I - Übungsblatt 11

Abgabe am 28.6.2016 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (2 + 2 + 1 + 1 Punkte)
Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, bestehend aus i.i.d Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Für $\lambda_0 > 0$ betrachten wir die Stichprobenfunktion

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{1}_{\left(0, \frac{-\log(1-\alpha)}{n\,\lambda_0}\right]}(\min\{x_1, \ldots, x_n\})$$

zum Testen der Nullhypothese $H_0 : \lambda = \lambda_0$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : \lambda > \lambda_0$ für ein $\alpha \in (0, 1)$.

(a) Zeige, dass durch φ ein Parametertest zum Signifikanzniveau α gegeben ist.

(b) Bestimme die Gütefunktion von φ.

(c) Ist der Test φ unverfälscht?

(d) Ist der Test φ konsistent?

Aufgabe 2 (2 + 3 + 4 Punkte)
Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, bestehend aus i.i.d Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \mathrm{U}(0, \theta)$ mit $\theta > 0$. Weiter seien Folgen von Stichprobenfunktionen $\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \ldots$ und $\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \ldots$ gegeben durch

$$\varphi_n^{(1)}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{1}_{\left(\frac{\theta_0}{2\sqrt{3n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)}\left(\left|\overline{x}_n - \frac{\theta_0}{2}\right|\right)$$

und

$$\varphi_n^{(2)}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{1}_{\left[\theta_0/\left(2+2z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{3n}}\right), \theta_0/\left(2-2z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{3n}}\right)\right]^c}(\overline{x}_n),$$

für jedes $n \geq 1$ sowie für beliebige $\alpha \in (0, 1/2)$ und $\theta_0 > 0$. Im Folgenden betrachten wir das Hypothesenpaar bestehend aus $H_0 : \theta = \theta_0$ und $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

(a) Zeige, dass $\{\varphi_n^{(1)}\}$ ein asymptotischer Parametertest zum Niveau α ist.

(b) Zeige, dass $\{\varphi_n^{(2)}\}$ ein asymptotischer Parametertest zum Niveau α ist.

(c) Sei $\theta \neq \theta_0$ beliebig. Berechne $\limsup_{n\to\infty} P_\theta(\varphi_n^{(i)}(X_1, \ldots, X_n) = 1)$ für $i \in \{1, 2\}$.

Bitte wenden.

Aufgabe 3 (4 + 3 + 2 + 1 Punkte)

Unter Normalverteilungsannahmen soll geprüft werden, ob die mittleren Lebensdauern von zwei verschiedenen Bleiakku-Typen übereinstimmen. Auf Modellebene bezeichne die Folge von i.i.d Zufallsvariablen $X_{1,1}, X_{1,2}, \ldots$ die Lebensdauern von Typ A und die Folge von i.i.d Zufallsvariablen, $X_{2,1}, X_{2,2}, \ldots$ die Lebensdauern von Typ B. Wir nehmen an, dass die Folgen $X_{1,1}, X_{1,2}, \ldots$ und $X_{2,1}, X_{2,2}, \ldots$ voneinander unabhängig sind. Ferner sei $X_{1,1} \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ und $X_{2,1} \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$ für unbekannte Parameter $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$. Jeweils 50 beobachtete Lebensdauern für Typ A und Typ B sind in der Datei `Bleiakkus.txt` gegeben.

(a) Sei $\mu_1 = \mu_2$. Zeige, dass

$$T(X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1}, X_{2,1}, \ldots, X_{2,n_2}) = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \frac{\overline{X}_{1,n_1} - \overline{X}_{2,n_2}}{S_{n_1,n_2}} \sim \mathrm{t}_{n_1+n_2-2},$$

für beliebige $n_1, n_2 \geq 2$, wobei

$$S^2_{n_1,n_2} = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left(\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1,i} - \overline{X}_{1,n_1})^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2,i} - \overline{X}_{2,n_2})^2 \right).$$

(b) Betrachte nun Daten $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}$ und das Hypothesenpaar bestehend aus $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ und $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$. Betrachte die Stichprobenfunktion

$$\varphi(x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}) = \mathbb{1}_{(-\infty,\alpha)}(p(x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}))$$

mit

$$\begin{aligned} &p(x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2}) \\ &= 2(1 - P_{\mu_1=\mu_2}(T(X'_{1,1}, \ldots, X'_{1,n_1}, X'_{2,1}, \ldots, X'_{2,n_2}) \leq |T(x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2})|)), \end{aligned}$$

wobei der Zufallsvektor $(X'_{1,1}, \ldots, X'_{1,n_1}, X'_{2,1}, \ldots, X'_{2,n_2})$ unabhängig von $(X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1}, X_{2,1}, \ldots, X_{2,n_2})$ sei mit

$$(X'_{1,1}, \ldots, X'_{1,n_1}, X'_{2,1}, \ldots, X'_{2,n_2}) \overset{\mathrm{d}}{=} (X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1}, X_{2,1}, \ldots, X_{2,n_2}).$$

Zeige, dass durch φ ein Parametertest zum Niveau α gegeben ist.

(c) Verwende Teilaufgabe (b), um mit **R** zu testen, ob die erwarteten Lebensdauern der Bleiakku-Typen A und B übereinstimmen.

(d) Ist die Annahme von gleichen Varianzen hier gerechtfertigt?