Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2016

Stochastik I - Übungsblatt 3

Abgabe am 3.5.2016 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (3 + 2 + 5 Punkte)

Seien $r, k \in \mathbb{N}$, sei $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ und $V_r \sim \mathrm{t}_r$.

(a) Zeige, dass

$$\mathbb{E}\, X^k = \begin{cases} \frac{2^{k/2}}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right), & \text{für } k \text{ gerade,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Zeige, dass

$$\frac{\Gamma\left(\frac{r-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} = \frac{2^{k/2}}{(r-2)(r-4)\ldots(r-k)},$$

falls k gerade und $r > k$.

(c) Sei $r > k$. Zeige, dass

$$\mathbb{E}\, V_r^k = \begin{cases} r^{k/2}\, \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)}{(r-2)(r-4)\ldots(r-k)} & \text{für } k \text{ gerade,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ unbekannt sind. Wie groß muss $\delta > 0$ gewählt werden, dass

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}_{25} - \mu}{S_{25}}\right| < \delta\right) > 0.99 \quad ?$$

Bitte wenden.

Aufgabe 3 (3 + 2 Punkte)

(a) Schreibe ein **R** Programm, das zu einem beliebigen Datenvektor $(x_1, \dots, x_n)$ der Länge $n \geq 1$ die zugehörige Realisierung der empirischen Verteilungsfunktion berechnet und eine $n \times 2$ Matrix

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & \widehat{F}(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ x_n & \widehat{F}(x_n) \end{pmatrix}$$

zurückgibt.
Hinweis: Verwende den Befehl `sort` *und bearbeite die Aufgabe ohne Verwendung des Packages* `ecdf`*.*

(b) Simuliere 1000 Realisierungen $(x_1, \dots, x_{1000})$ einer Exponentialverteilung mit Erwartungswert 1. Berechne die Realisierungen der empirischen Verteilungsfunktion für die Datenvektoren $(x_1, \dots, x_{10})$, $(x_1, \dots, x_{100})$ und $(x_1, \dots, x_{1000})$. Erstelle einen Plot in dem alle drei Realisierungen der empirischen Verteilungsfunktion, sowie die theoretische Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit Erwartungswert 1 in verschiedenen Farben eingezeichnet sind.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $n \geq 1$ beliebig. Betrachte die Zufallsstichprobe $X_1, \dots, X_n$, bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Seien $u, v \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeige, dass

$$\operatorname{Cov}(\widehat{F}_n(u), \widehat{F}_n(v)) = \frac{F(\min\{u, v\}) - F(u)F(v)}{n} \geq 0,$$

wobei $\widehat{F}_n$ die empirische Verteilungsfunktion von $X_1, \dots, X_n$ bezeichnet.