



Stochastik I - Übungsblatt 4

Abgabe am 10.5.2016 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (5 + 5 + 4 + 4 Punkte)

Sei $n \geq 1$. Betrachte die Zufallsstichprobe (X_1, \dots, X_n) , bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen. Bestimme (falls möglich) für folgende parametrische Verteilungen von X_1 den zugehörigen Punktschätzer mit der Momenten-Methode sowie mit der Maximum-Likelihood-Methode. Überprüfe zusätzlich, ob der mit der Momenten-Methode bestimmte Punktschätzer stark konsistent ist. Sei

- (a) $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$,
- (b) $X_1 \sim \text{Geo}(\theta)$ mit $\theta \in (0, 1)$,
- (c) $X_1 \sim U(\{1, \dots, \ell\})$ mit $\ell \in \mathbb{N}$,
- (d) X_1 ist absolutstetig mit Wahrscheinlichkeitsdichte f_{X_1} , wobei $f_{X_1}(x) = \theta x^{-2} \mathbb{1}_{[\theta, \infty)}(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $\theta > 0$.

Aufgabe 2 (5 + 2 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable, die invers Gauß-verteilt ist mit unbekanntem Parameter $\lambda, \mu > 0$, d.h. X ist absolutstetig mit Wahrscheinlichkeitsdichte f_X , wobei

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right) \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$. Sei $n \geq 1$. Betrachte die Zufallsstichprobe (X_1, \dots, X_n) , bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen mit $X_1 \stackrel{d}{=} X$.

- (a) Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ für den Parametervektor (λ, μ) .
- (b) Lade die Textdatei `data_invg.txt` von der Vorlesungshomepage herunter. Die Textdatei enthält eine Realisierung (x_1, \dots, x_{1000}) der Zufallsstichprobe (X_1, \dots, X_{1000}) . Schreibe ein Programm in **R**, um die Parameter λ und μ aus der Stichprobe zu schätzen. Verwende hierfür die in Teilaufgabe (a) hergeleiteten Schätzer.