ulm university universität uulm

Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2016

Stochastik I - Übungsblatt 6

Abgabe am 24.5.2016 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Zeige, dass $\overline{X}_n$ in der Klasse derjenigen Schätzer, die die Bedingungen des Satzes von Cramér-Rao erfüllen, bester erwartungstreuer Schätzer für λ ist. Zeige insbesondere auch, dass die Familie der Poissonverteilungen sowie der Schätzer $\overline{X}_n$ die Voraussetzungen des Satzes von Cramér-Rao erfüllt.

Aufgabe 2 (5 + 5 Punkte)
Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \mathrm{U}(0, \theta)$. Betrachte die Schätzer

$$\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}_n \quad \text{und} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n} \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

(a) Bestimme die Erwartungswerte und Varianzen von $\hat{\theta}_1$ sowie von $\hat{\theta}_2$ und zeige, dass $\operatorname{Var} \hat{\theta}_1 > \operatorname{Var} \hat{\theta}_2$ für alle $n \geq 2, \theta > 0$.

(b) Berechne die untere Schranke aus dem Satz von Cramér-Rao für beide Schätzer, d.h. berechne für $i \in \{1, 2\}$ den Ausdruck

$$\frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \mathbb{E}_\theta \left(\hat{\theta}_i(X_1, \ldots, X_n)\right)\right)^2}{n\, \mathbb{E}_\theta \left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log L(X_1; \theta)\right)^2\right)}.$$

Wie passt das Ergebnis zu den berechneten Varianzen aus Teilaufgabe (a)?

Aufgabe 3 (2 + 5 Punkte)
Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen, wobei $\mu = \mathbb{E}\, X_1 \neq 0$ und $\sigma^2 = \operatorname{Var} X_1 > 0$. Ferner sei durch

$$\hat{\mu}_c(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n c_i X_i$$

mit $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Schätzer für μ gegeben.

(a) Zeige, dass $\hat{\mu}_c$ genau dann ein erwartungstreuer Schätzer für μ ist, wenn $\sum_{i=1}^n c_i = 1$.

(b) Zeige, dass $\overline{X}_n$ unter allen erwartungstreuen Schätzern der Form $\hat{\mu}_c$ die kleinste Varianz besitzt.