Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2016

Stochastik I - Übungsblatt 9

Abgabe am 14.6.2016 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (4 + 3 Punkte)
Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Betrachte den Schätzer

$$\hat{\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = -\log\left(\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(0,1]}(X_i)\right)$$

für λ.

(a) Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgende Ungleichung gilt:

$$-\log\left(\frac{1}{n} + e^{-\lambda}\right) \leq \mathbb{E}\,\hat{\lambda}(X_1, \ldots, X_n) \leq \log(n).$$

(b) Zeige, dass $\hat{\lambda}(X_1, \ldots, X_n)$ stark konsistent für λ ist.

Aufgabe 2 (8 + 4 + 6 Punkte)
Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen, wobei X_1 absolutstetig ist mit Dichte

$$f_{X_1}(x) = (\theta + 1)x^{\theta}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ und einen unbekannten Parameter $\theta > 0$.

(a) Zeige, dass

$$\sqrt{\frac{n(2-\overline{X}_n)}{\overline{X}_n}}\left(\frac{2\overline{X}_n - 1}{1-\overline{X}_n} - \theta\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0,1) \qquad \text{für } n \to \infty$$

und bestimme ein asymptotisches Konfidenzintervall für θ zum Niveau $\gamma = 1 - \alpha$.

(b) Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ für θ und zeige, dass $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ schwach konsistent für θ ist.

(c) Zeige, dass

$$\frac{\sqrt{n}}{\theta + 1}\left(\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n) - \theta\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0,1) \qquad \text{für } n \to \infty.$$