



Angewandte Stochastik 1 - Übungsblatt 1

Alle Punkte dieses Übungsblattes sind **Bonuspunkte!** Abgabe: 28. April vor Beginn der Übung.

Allgemeine Hinweise:

- Die Teilnahme an der Übung setzt eine Anmeldung im SLC-Portal voraus.
- Übungsblätter müssen vor Beginn der Übung abgegeben werden. Nach 10.15 Uhr können keine Lösungen mehr angenommen werden.
- Übungsblätter sollen zu zweit abgegeben werden.
- Bitte Namen und SLC-Logins deutlich auf das Blatt schreiben.
- Mehrere Blätter bitte tackern.
- Um zur Klausur zugelassen zu werden müssen insgesamt auf allen Blättern mindestens 50% der Übungspunkte erreicht werden.

Im Folgenden bezeichne stets

$$\mathbb{1}_M(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in M \\ 0 & ; x \notin M \end{cases}$$

die Indikatorfunktion auf einer Menge M .

Aufgabe 1 (3 + 1 + 2 Punkte)

Betrachte im Folgenden die Funktion $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ gegeben durch $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, d.h.

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases},$$

wobei $\lambda > 0$ ein Parameter sei.

- Bestimme $\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x) dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} x f_\lambda(x) dx$ sowie $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\lambda(x) dx$.
- Sei nun $F_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F_\lambda(t) = \int_{-\infty}^t f_\lambda(x) dx$, $t \in \mathbb{R}$. Bestimme F_λ .
- Zeige, dass die Funktion F_λ aus (b) auf $(0, \infty)$ streng monoton steigend ist und bestimme $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_\lambda(t)$ sowie $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_\lambda(t)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Für $r > 0$ sei $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq r\}$ (die Kreisfläche um $(0, 0)$ mit Radius r). Außerdem sei $f_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_r(x, y) = e^{-\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbb{1}_{B_r}(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Bestimme $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Es sei nun $\Omega = \{5, 6, 7, 8, 9, 16, 17, 18, 19, 20\}$ und die Teilmengen $A = \{6, 8, 16, 18, 20\}$, $B = \{5, 7, 9, 17, 19\}$, $C = \{16, 17, 18, 19\}$ und $D = \{6, 9, 20\}$. Schreibe folgende Mengen als Aufzählung ihrer Elemente:

$$(i) A \cup C \quad (ii) A \cap B \quad (iii) C^c \quad (iv) (C^c \cap D) \cup B \quad (v) (\Omega \setminus C)^c \quad (vi) A \setminus C$$