Dr. Kirsten Schorning
Dipl.-Math. Stefan Roth

SoSe 2017
26. April 2017

Angewandte Stochastik 1 - Übungsblatt 2

Abgabe: 12. Mai vor Beginn der Übung. ($\Sigma = 46$ Punkte)

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 Punkte)

Gib für folgende zufällige Ereignisse einen möglichst einfachen Grundraum Ω an. Verwende dabei nur mathematische Ausdrücke und Definitionen. Beschreibe auch kurz in Worten, welchem (Elementar)-Ereignis ein einzelnes Element $\omega \in \Omega$ entspricht.

(a) Du sitzt vor dem H22 und beobachtest, wieviele Studierende den Hörsaal nach der letzten Vorlesung verlassen.

(b) Du triffst an der Uni einen Kommilitonen und fragst ihn, ob er Zeit hat um mit dir essen zu gehen und wenn ja, in welches der Uni Speiselokale er gehen möchte.

(c) Du jobbst in einer Bank am Schalter und notierst Dir, wieviele Kunden du an einem Tag bedienst und wieviel Geld jeder einzelne von seinem Konto abhebt[1].

Aufgabe 2 (1 + 4 + 2 + 5 Punkte)

Im Folgenden sei stets Ω eine nichtleere Menge. Begründe, ob es sich bei den Ereignissystemen $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_4$ um σ-Algebren handelt.

(a) $\Omega = \{23, U, \varepsilon, ☺, \square, ☼\}$ und $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{23, U, \varepsilon, ☺\}, \{23, \square, ☼\}, \{U, \varepsilon, ☺\}, \{23\}\}$

(b) $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ für eine nichtleere Teilmenge A von Ω.

(c) $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{F}_3 = \{A \subset \mathbb{N} : \ A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$

(d) $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}_4 = \{A \subseteq \mathbb{R} : \ A \subseteq [0,1] \text{ oder } A^c \subseteq [0,1]\}$

Aufgabe 3 (2 + 3 + 3 + 3 Punkte)

Betrachte folgende Ereignisse bzgl. der Wertentwicklung des Dollarkurses nach einem Jahr:

1.) A = "Der Kurs steigt um weniger als 5%, fällt aber nicht"

2.) B = "Der Kurs steigt um 5-10%"

3.) C = "Der Kurs steigt um über 10%"

Betrachte die folgenden Ereignisse:

(a) $A \cup B$

(b) $(A \cup B \cup C)^c$

(c) $(A \cup B)^c \cup C$

[1] Hinweis: Du könntest auch keinen Kunden bedient haben!

(d) $B^c \cap C^c$

Beschreibe die Ereignisse in (a)-(d) jeweils zunächst in Worten und bestimme ihre Wahrscheinlichkeiten, falls bekannt ist, dass $\mathbb{P}(A) = 0.4$ und $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 0.05$

Aufgabe 4 (2 + 3 + 3 Punkte)

Im Folgenden ist $(\Omega, \mathcal{F})$ stets ein Meßraum und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. In welchen Fällen ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum?

(a) $\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N} \cup \{0\})$ und $\mathbb{P}(\{k\}) = (1/2)^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(b) $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ und $\mathbb{P}(A) = \mathbb{1}_A(0)$, $A \in \mathcal{F}$.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt, $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(A) = \sum_{j \in A} 2j(n(n+1))^{-1}$, $A \in \mathcal{F}$.

Aufgabe 5 (3 + 3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$. Zeige folgende Ungleichungen[2]:

(a) $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

(b) $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i^c)$

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Bei der Multiple-Choice Aufgabe in der Klausur zu „Angewandte Stochastik I" kennt Kirsten auf 20 der insgesamt 25 Fragen die richtige Antwort. Da sie einige Vorlesungen geschwänzt hat, muss sie bei den restlichen 5 Fragen raten. Nimm an, dass bei jeder Frage 4 Antwortmöglichkeiten zur Auswahl stehen, von denen genau eine richtig ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Kirsten genau 3 der 5 Fragen richtig beantwortet?

[2] Verwende in (a) vollständige Induktion