ulm university universität uulm

Dr. Kirsten Schorning
Dipl.-Math. Stefan Roth

SoSe 2017
12. Mai 2017

Angewandte Stochastik 1 - Übungsblatt 3

Abgabe: 26. Mai vor Beginn der Übung. ($\Sigma = 43$ Punkte)

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 Punkte)

Beim Scrabble werden vor Spielstart aus einem Säckchen mit 102 Buchstaben (35 Vokale, 3 Umlaute, 62 Konsonanten und 2 Joker/Blanks) 7 zufällig herausgezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) 5 Konsonanten und 2 Vokale

(b) mindestens 1 Joker

(c) kein Vokal

gezogen wird.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

In einer Urne seien drei rote, zwei schwarze und fünf weiße Kugeln. Wir ziehen zufällig vier Kugeln nacheinander mit Zurücklegen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

(a) Die erste gezogene Kugel ist eine weiße, die letzte eine rote.

(b) Alle drei Farben werden gezogen.

(c) Genau zwei Farben werden gezogen.

(d) Alle vier Kugeln sind weiß.

(e) Genau eine weiße und eine rote Kugel werden gezogen.

Aufgabe 3 (3 + 2 + 2 Punkte)

Betrachte das zweimalige Würfeln eines fairen Würfels. Die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ beschreibe die Größere der beiden geworfenen Augenzahlen (d.h. wurde z.B. eine 3 und eine 2 geworfen, so hat X den Wert 3).

(a) Gib einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ an.

(b) Bestimme die kleinste Menge C, so, dass $\mathbb{P}(X \in C) = 1$.

(c) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsfunktion $\{p_k\}$ von X mit der Menge C aus Teil (b), d.h. gib für alle $x_k \in C$ jeweils $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ an.

Aufgabe 4 (3 + 2 Punkte)

Beim Lotto "6 aus 49" betrage der aktuelle Jackpot 15 Millionen Euro. Es sei bekannt, dass an der nächsten Ziehung 5 Millionen Spieler teilnehmen, von denen jeder jeweils genau einen Tipp abgegeben hat. Den Jackpot gewinnt man, wenn man die "6 Richtigen" und zusätzlich die auf dem Tippschein bereits vorher aufgedruckte Superzahl (eine der Zahlen $0, \ldots, 9$) hat.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Spieler den Jackpot gewinnt (der Gewinner ihn also mit keinem anderen Spieler teilen muss), wenn davon ausgegangen wird, dass sowohl die Tipps der Spieler als auch die Superzahl zufällig ist (also ohne System getippt wurde)?

(b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit in (a) auch approximativ mit dem "Gesetz der seltenen Ereignisse". Gib das Ergebnis auf neun Nachkommastellen gerundet an.

Aufgabe 5 (3 + 5 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei

$$\Omega = \{1,2,3,4,5\} \quad \text{und}$$
$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1,2,3,4\}, \{3,4,5\}, \{5\}, \{1,2\}, \{1,2,5\}, \{3,4\}\}.$$

(a) Zeige, dass es sich bei $\mathcal{F}$ tatsächlich um eine σ-Algebra handelt.

(b) Betrachte nun die Abbildungen X und Y gegeben durch

(i) $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$

(ii) $Y : \Omega \to \mathbb{R}, \quad Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in \{3,4,5\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Sind X und Y Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$? (Eine Antwort ist zu begründen!)

Aufgabe 6 (3 + 4 Punkte)

Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Hierbei sind $\mathcal{B}([0,1])$ die Borel'sche σ-Algebra auf dem Intervall $[0,1]$ (d.h. alle Teilmengen von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, die in $[0,1]$ liegen) sowie λ das Lebesguemaß auf $[0,1]$, d.h. λ ordnet jedem Teilintervall von $[0,1]$ seine Länge zu (insbesondere also $\lambda([0,1]) = 1$). Im Folgenden sei stets $p \in (0,1)$ beliebig aber fest vorgegeben. Finde Zufallsvariablen X, Y auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ mit

(a) $X \sim \mathsf{Bin}(1,p)$, sowie

(b) $Y \sim \mathsf{Bin}(2,p)$.

Begründe auch, warum es sich bei deiner Wahl um Zufallsvariablen handelt.