Dr. Kirsten Schorning
Dipl.-Math. Stefan Roth

SoSe 2017
24. Mai 2017

Angewandte Stochastik 1 - Übungsblatt 4

Abgabe: 9. Juni vor Beginn der Übung. ($\Sigma = 52$ Punkte)

Aufgabe 1 (3 + 2 + 3 Punkte)

Im Folgenden sei Y eine auf der Menge $C = \{-1, 0, 1, 2\}$ gleichverteilte Zufallsvariable, d.h. $\mathbb{P}(Y = k) = 1/4$ für jedes $k \in C$. Bestimme für die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 jeweils Zähldichte und Verteilungsfunktion.

(a) $X_1 = Y^2$.

(b) $X_2 = Y^4 - 2Y^3 - Y^2 + 2Y$.

(c) $X_3 = \begin{cases} 0, & Y + 2 \leq 1, \\ 1, & 1 < Y + 2 \leq 3, \\ 2, & Y + 2 > 3. \end{cases}$

Aufgabe 2 (4 + 4 + 2 Punkte)

An der Haltestelle „Lehrer Tal“ fahren abwechselnd Busse der Linien 3 und 5 zur Universität ab. Zu den Stoßzeiten sind die Busse jedoch so voll, dass nicht alle tatsächlich halten. Es sei bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bus der Linie 3 an der Haltestelle Lehrer Tal hält 1/3 ist, während die Wahrscheinlichkeit bei der Linie 5 eine Konstante $p \in (0, 1)$ ist.
Du kommst an der Haltestelle Lehrer Tal an, und beschließt, den nächsten Bus, der an der Haltestelle anhält, zur Uni zu nehmen. Laut Fahrplan ist der nächste Bus ein Bus der Linie 3.

(a) Die Zufallsvariable X sei wie folgt definiert: Für $k \in \mathbb{N}$ beschreibe $\{X = k\}$ das Ereignis „Der k-te ankommende Bus ist der erste, der anhält“. Bestimme die Zähldichte von X.

(b) Die Zufallsvariable Y sei die Nummer der Buslinie mit der du an der Uni ankommen wirst, d.h. $Y \in \{3, 5\}$. Bestimme die Zähldichte von Y.

(c) Für welchen Wert von p gilt $\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(Y = 5)$?

Aufgabe 3 (3 + 3 + 4 Punkte)

Für welche $c \in \mathbb{R}$ handelt es sich bei folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, um Wahrscheinlichkeitsdichten?

(a) $f_1(x) = \frac{c}{\sqrt{x-1}} \mathbb{1}_{(1,2]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f_2(x) = ce^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) $f_3(x) = \frac{c}{2} |\sin(cx)| \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (3 + 3 Punkte)

Es sei X eine absolutstetige Zufallsvariable mit streng monoton wachsender Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$.

(a) Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable $F(X)$?

(b) Sei nun $Y \sim U(0,1)$ eine auf dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable und $Z = F^{-1}(Y)$. Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable Z?

Begründe in beiden Fällen deine Antwort!

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ sei die Zufallsvariable Y gegeben durch $Y = aX + b$. Zeige, dass $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Aufgabe 6 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

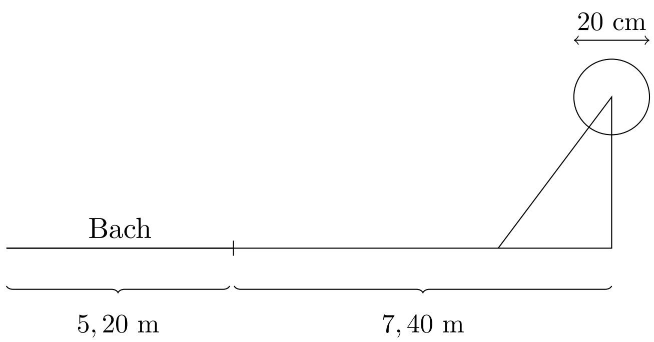
Zu Forschungszwecken wurde ein mittelalterliches Katapult nachgebaut. Es steht $7,40$m vom Ufer eines Baches entfernt, der $5,20$m breit ist. Die Munition besteht aus Steinkugeln, die einen Durchmesser von 20cm aufweisen. Nach einigen Probeschüssen wurde die Theorie aufgestellt, dass die Schussweite normalverteilt ist, im Mittel 10m beträgt und eine Standardabweichung von 5m hat.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine geschossene Kugel in vollem Umfang im Bach landet?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel über den Bach geschossen wird und (zumindest teilweise) am gegenüberliegenden Ufer aufschlägt?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schuss nach hinten los geht (d.h., dass die Kugel nicht zum Bach, sondern in die entgegengesetzte Richtung fliegt)?

(d) Elf Meter hinter dem Katapult befindet sich sich ein geparkter Wagen. Ist es ausgeschlossen, dass eine Kugel den Wagen beschädigt? Begründe deine Antwort.



Aufgabe 7 (3 + 2 Punkte)

Die sogenannte Gammafunktion $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeige mittels partieller integration, dass $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ gilt, für beliebige $x > 0$.

(b) Verwende (a) und vollständige Induktion um zu zeigen, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\Gamma(n+1) = n!$$