Dr. Kirsten Schorning
Dipl.-Math. Stefan Roth

SoSe 2017
7. Juni 2017

Angewandte Stochastik 1 - Übungsblatt 5

Abgabe: 23. Juni vor Beginn der Übung. ($\Sigma = 40$ Punkte)

Aufgabe 1 (3 + 3 + 4 Punkte)

Für $i = 1, 2, 3$ sei im Folgenden $(X_i, Y_i) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ jeweils ein Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion $F_i : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$. Bestimme die Randverteilungen[1] von X_i und Y_i, $i = 1, 2, 3$, falls

(a) F_1 die Zähldichte

Y_1	$X_1 = 1$	2	3
2	0.1	0.05	0.2
4	0.05	0.15	0.1
5	0	0.2	0.15

besitzt.

(b) F_2 die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_2(x, y) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_K(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ besitzt[2].

(c) F_3 die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_3(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

besitzt.

Aufgabe 2 (3 + 2 Punkte)

Frau Müller bringt ihrem Sohn jeden Tag nach der Arbeit eine rotationssymmetrische schokoladige Leckerei mit, die ein wechselndes Spielzeug als Beigabe im Inneren enthält. Da sich ihr Sohn am meisten freut, wenn es sich bei dieser Beigabe um ein Auto handelt, hat Frau Müller darauf geachtet, bei welchem Supermarkt die Wahrscheinlichkeit dafür am höchsten ist. Sie hat dabei folgende Vermutung bzgl. der Wahrscheinlichkeiten für ein Auto aufgestellt:

Supermarkt A: 20 %, Supermarkt B: 30 %, Supermarkt C: 10 %, Supermarkt D: 5 %.

Da Frau Müller an ständig wechselnden Orten arbeitet, kauft sie mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten in den Supermärkten A-D ein:

Supermarkt A: 20 %, Supermarkt B: 40 %, Supermarkt C: 25 %, Supermarkt D: 15 %.

Nimm nun an, dass die von Frau Müller geschätzten Zahlen stimmen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Frau Müllers Sohn ein Auto findet?

[1] d.h. im Falle einer absolutstetigen Zufallsvariablen die Wahrscheinlichkeitsdichte und im Falle einer diskreten Zufallsvariablen die Zähldichte.
[2] Hierbei handelt es sich um die Dichte der Gleichverteilung auf dem Einheitskreis.

(b) Er hat heute ein Auto gefunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Frau Müller im Supermarkt C eingekauft?

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Betrachte einen Tetraeder, der auf drei Seiten jeweils mit grün, blau bzw. rot eingefärbt ist. Die vierte Seite ist in drei Teile unterteilt, die mit jeweils einer der Farben gefärbt ist; somit tritt auf dieser Seite jede der drei Farben auf. Wir werfen den Tetraeder und interessieren uns für die Ereignisse „auf der unten liegenden Seite findet sich grün“, „auf der unten liegenden Seite findet sich blau“ und „auf der unten liegenden Seite findet sich rot“. Zeige, dass diese Ereignisse zwar paarweise unabhängig, jedoch nicht unabhängig sind.

Aufgabe 4 (1 + 2 + 4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Außerdem bezeichne $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$ die Menge aller Ereignisse die von sich selbst unabhängig sind.

(a) Zeige: $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

(b) Welche Eigenschaften gelten für die Elemente von $\mathcal{M}$ hinsichtlich ihrer Wahrscheinlichkeiten? Finde eine äquivalente Charakterisierung für $\mathcal{M}$. Begründe deine Aussagen!

(c) Zeige, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Betrachte folgendes Experiment: Zunächst wird ein fairer Würfel geworfen. Die gefallene Augenzahl sei durch die Zufallsvariable X beschrieben. Anschließend wird X-Mal eine Münze geworfen (die nicht zwingend fair sein muss!). Die Zufallsvariable Y sei die Anzahl der Münzwürfe, bei denen "Kopf" oben liegt. Bestimme die Zähldichte des Zufallsvektors (X, Y).

Aufgabe 6 (3 + 4 Punkte)

Bestimme für den Zufallsvektor (X, Y) jeweils die bedingte Verteilung[3] von Y gegeben $\{X = x\}$, falls

(a) (X, Y) die Dichte f_3 aus Aufgabe 1, (c) besitzt.

(b) (X, Y) für $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ die Zähldichte

$$\mathbb{P}(X = n, Y = k) = \begin{cases} 0, & k > n, \\ \binom{n}{k} p^{k+1}(1-p)^{2n-k-1}, & k \leq n \end{cases}$$

besitzt, wobei $p \in (0, 1)$ ein Parameter sei.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Die Zufallsvariable $N \sim \mathsf{Poi}(\lambda)$, $\lambda > 0$ beschreibe die Anzahl der Fehlermeldungen eines Systems an einem bestimmten Tag. Mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ wird eine Fehlermeldung durch ein im System defektes Bauteil ausgelöst. Die Anzahl der Fehlermeldungen eines Tages, die auf ein defektes Bauteil zurückzuführen sind, sei durch die Zufallsvariable Z beschrieben. Zeige, dass $Z \sim \mathsf{Poi}(\lambda p)$, falls davon ausgegangen wird, dass sowohl die Ursachen der einzelnen Fehlermeldungen unabhängig sind als auch deren Anzahl N unabhängig von den Fehlerursachen ist.

---

[3] d.h. im Falle einer absolutstetigen Zufallsvariablen die bedingte Dichte und im Falle einer diskreten Zufallsvariablen die bedingte Zähldichte.