Dr. Kirsten Schorning
Dipl.-Math. Stefan Roth

SoSe 2017
23. Juni 2017

Angewandte Stochastik 1 - Übungsblatt 6

Abgabe: 7. Juli vor Beginn der Übung. ($\Sigma = 46$ Punkte)

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Ein Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$ heißt zweidimensional normalverteilt, falls er die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(K)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top K^{-1}(x-\mu)\right), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

besitzt, wobei $\mu = (\mu_1, \mu_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor und

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \rho \in (-1,1),\ \sigma_1,\ \sigma_2 > 0$$

eine symmetrische und positiv definite (d.h. zusätzlich gilt $\det(K) > 0$) Matrix sei. Zeige: Die Komponenten X_1 und X_2 von X sind genau dann unabhängig, wenn K eine Diagonalmatrix ist, d.h. wenn $\rho = 0$ gilt[1].

Aufgabe 2 (3 + 5 + 4 + 5 Punkte)

(a) Seien X_1, $X_2 \sim U(0,1)$ unabhängig. Bestimme die Dichte von X_1/X_2.

(b) Für $i = 1, \ldots, n$ seien $X_i \sim Poi(\lambda_i)$, $\lambda_i > 0$, unabhängige poissonverteilte Zufallsvariablen. Zeige, dass dann $\sum_{i=1}^n X_i$ ebenfalls poissonverteilt ist und bestimme in diesem Fall auch den Parameter[2].

(c) Seien $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ unabhängig. Bestimme die Dichte der Zufallsvariablen X_1/X_2 und X_1+X_2.

(d) Seien $X_1 \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, $X_2 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ unabhängig. Zeige, dass dann $X_1+X_2 \sim N(\mu_0+\mu_1, \sigma_0^2+\sigma_1^2)$.

Aufgabe 3 (4 + 4 + 4 Punkte)

Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Wertebereich $X(\Omega)$. Sei weiterhin $Y = g(X)$. Bestimme in den folgenden Fällen $\mathbb{E}[Y^r]$, $r \in \mathbb{N}$, und $\mathsf{Var}(Y)$:

(a) $X(\Omega) = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, \ldots, 4\pi\} = \{k\pi/2,\ k = 0, \ldots, 8\}$ und X ist gleichverteilt[3], $g(x) = \sin(x)$.

(b) $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $X \sim \mathsf{Bin}(n,p)$, $p \in (0,1)$, $g(x) = 2^x$.

(c) $X(\Omega) = \mathbb{N}_0$ und $X \sim \mathsf{Poi}(\lambda)$, $\lambda > 0$, $g(x) = e^{2x}$. Beachte Fußnote[4].

---

[1] Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ gilt.

[2] Hinweis: Betrachte zunächst den Fall $n = 2$ und stelle dann eine Hypothese für Allgemeines $n \in \mathbb{N}$ auf. Beweise diese Mittels vollständiger Induktion!

[3] d.h. X nimmt alle Werte in $X(\Omega)$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit an.

[4] Hinweis: Verwende $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (2 + 1 Punkte)

Es sei X eine beliebige Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum[5] $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und A eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Die Zufallsvariable Y sei definiert durch $Y = \mathbb{1}_A(X)$. Zeige, dass für beliebiges $r \in \mathbb{N}$ das r-te Moment von Y stets existiert, d.h. $\mathbb{E}[|Y|^r] < \infty$. Zeige außerdem:

(a) $\mathbb{E}[Y^r] = P(X \in A)$, $r \in \mathbb{N}$

(b) $\mathsf{Var}(Y) = P(X \in A) - P(X \in A)^2$

Aufgabe 5 (3 + 3 Punkte)

Verwende Aufgabe 7 von Blatt 4 um folgende Resultate zu zeigen:

(a) Es sei $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Zeige, dass für $r \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{E}[X^r] = \frac{r!}{\lambda^r}.$$

(b) Es sei X gammaverteilt mit den Parametern λ, $p > 0$, d.h. X besitze die Dichte

$$\rho_X(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeige: $\mathbb{E}[X] = \frac{p}{\lambda}$.

[5] Bei dieser Aufgabe ist es völlig unerheblich, welchen Wahrscheinlichkeitsraum man wählt. Wenn es für die Anschauung hilfreich ist, kannst du einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum annehmen.