Dr. Kirsten Schorning
Dipl.-Math. Stefan Roth

SoSe 2017
7. Juli 2017

Angewandte Stochastik 1 - Übungsblatt 7

Alle Aufgaben auf diesem Übungsblatt sind noch **klausurrelevant**. Abgabe: Optional bis zum 19. Juli in Helmholtzstraße 18, Raum 1.45. Abholung ab Freitag, 21. Juli in vorher genanntem Raum.

Aufgabe 1

Es sei X eine gleichverteilte Zufallsvariable mit Wertebereich $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und $Y = X^2$.

(a) Bestimme die Kovarianz von X und Y.

(b) Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 2

Es sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = 2^{-1}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, sowie $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - \mathbb{E}[X]| \geq 2\sqrt{\mathsf{Var}(X)}\}$.

(a) Bestimme $P(X \in A)$.

(b) Vergleiche das Ergebnis aus (a) mit der Abschätzung die sich aus der Ungleichung von Tschebyscheff ergibt.

Aufgabe 3

Sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit Dichte $f_c : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ gegeben durch

$$f_c(x, y) = ce^{-(x+y)}\mathbb{1}_\Delta(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

wobei c eine positive Konstante ist und $\Delta = \{(x, y) \in [0, \infty)^2 : \; x + y \leq 1\}$.

(a) Zeige, dass $c = e/(e - 2)$ gilt.

(b) Bestimme die Randdichten von X und Y.

(c) Bestimme $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Entscheide, ob X und Y unabhängig sind

(d) Gib den Erwartungswertvektor und die Kovarianzmatrix von (X, Y) an.

Aufgabe 4

Es seien X und Y Zufallsvariablen mit $0 < \mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$.

(a) Für welchen Wert von $a \in \mathbb{R}$ wird $\mathbb{E}[(X - aY)^2]$ minimal?

(b) Es bezeichne $\rho(X, Y)$ den Korrelationskoeffizienten von X und Y. Für welche Werte von $\rho(X, Y)$ gilt $\mathbb{P}(X = aY) = 1$?[1]

[1] Hinweis: $\mathbb{P}(X = aY) = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathbb{E}[(X - aY)^2] = 0$.

(c) Zeige, dass die Zufallsvariablen $X - Y$ und $X + Y$ genau dann unkorreliert sind, wenn $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2]$.

(d) Gib ein Beispiel für X und Y so, dass $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2]$ aber $X - Y$ und $X + Y$ nicht unabhängig sind.

Aufgabe 5

Die Messung der Körpergrößen von 200 nach der Geburt zufällig ausgewählten Säuglingen ergab einen Durchschnittswert von 49.35cm ($= \bar{x}_{200}$). Wir fassen die Daten als Beobachtung $(x_1, \ldots, x_{200})$ einer i.i.d. Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_{200})$ auf.

(a) Nimm an, dass $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$, wobei $\mu = 48.8$cm und $\sigma^2 = 5.3\text{cm}^2$. Bestimme $P(\bar{X}_{200} > \bar{x}_{200})$.

(b) Nimm nun an, dass X_1 exponentialverteilt ist mit Erwartungswert 48.8cm. Bestimme mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes einen Näherungswert für $P(\bar{X}_{200} > \bar{x}_{200})$.

Aufgabe 6

An Kasse 1 des Supermarktes REWEKA sei die Wartezeit eines Kunden (in Minuten) beschrieben durch eine Zufallsvariable $X \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$, wobei der Parameter $\lambda > 0$ unbekannt sei. REWEKA vermutet, dass $\lambda = 1/3$ ist. Die Vermutung soll überprüft werden. Nimm dazu im Folgenden an, dass sie richtig ist.

(a) Die Auswertung einer Stichprobe der Wartezeiten von 10 Kunden ergab, dass 4 Kunden länger als 3 Minuten warten mussten. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür unter der Annahme, dass die Wartezeiten aller Kunden unabhängig voneinander sind.

(b) Im zweiten Schritt wurden die Wartezeiten von 150 Kunden an Kasse 1 gemessen. Dabei ergab sich, dass die *Summe* aller Wartezeiten der beobachteten Personen mehr als 550 Minuten betrug. Berechne unter der Vermutung **approximativ**[2] die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis, falls angenommen wird, dass die Wartezeiten aller Kunden unabhängig voneinander sind.

[2] Verwende den zentralen Grenzwertsatz.