Dipl.-Math. Stefan Roth
3. April 2017

WS 2016/17

Brush-Up Stochastik - Übungsblatt 1

Besprechung: 4. April im Kurs.

1 Modellierung von Zufallsexperimenten

Aufgabe 1

Gib für folgende Versuche einen geeigneten Grundraum Ω an. Beschreibe auch kurz, welches $\omega \in \Omega$ welchem modellierten Ergebnis entspricht.

(a) Du schaust ein Fussballspiel an und notierst das Ergebnis (= den Spielstand am Ende des Spiels).

(b) Du fährst mit der Linie 3 von der Uni West zur Uni Süd und notierst an jeder der 5 Haltestellen, wieviele Leute einsteigen.

Aufgabe 2

Eine Münze wird unendlich oft geworfen. Es sei A_k das Ereignis "Im k-ten Wurf fällt Kopf". Beschreibe folgende Ereignisse nur mittels Mengenoperationen und der Ereignisse A_k.

(a) Die ersten drei Würfe bringen das selbe Resultat.

(b) Spätestens im 10: Wurf fällt zum ersten Mal Kopf.

(c) Nur in Würfen mit gerader Nummer fällt Kopf.

Bsp.: "Bei den ersten beiden Würfen fällt einmal Kopf und einmal Zahl." entspricht

$$(A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1^c \cap A_2).$$

Aufgabe 3

Betrachte den Grundraum $\Omega = \mathbb{R}^2$ und die Teilmengen $A = \{(x, y) \in \Omega : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \Omega : \ |x + y| \leq 1\}$, $C = \{(x, y) \in \Omega : \ |x - y| \leq 1\}$, $D = \{(x, y) \in \Omega : \ |x| + |y| \leq 1\}$ und $E = \{(x, y) \in \Omega : \ y \geq 0\}$. Skizziere die Mengen A, B, C, D, E sowie

$$(i)\ B \cap C \qquad (ii)\ D \backslash E \qquad (iii)\ (B \cap E) \cup (A \cap C^c) \qquad (iv)\ A \cap D^c \qquad (v)\ D \backslash A^c$$

2 Laplace-Räume und Kombinatorik

Aufgabe 4

Auf dem G7-Gipfel sollen sich die 7 Regierungschefs der Teilnehmerländer für ein Gruppenfoto in einer Reihe aufstellen.

(a) Bestimme einen geeigneten Grundraum.

(b) Wieviele Möglichkeiten gibt es

   (i) die Regierungschefs in einer Reihe aufzustellen?

   (ii) die Regierungschefs so in einer Reihe aufzustellen, dass die deutsche Bundeskanzlerin und der US-Präsident an den beiden Enden der Reihe stehen?

   (iii) die Regierungschefs so in einer Reihe aufzustellen, dass die Regierungschefs der nicht-europäischen Länder alle 3 nebeneinander stehen?

Aufgabe 5

In dieser Aufgabe liege ein Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum vor. Als Zufallsexperiment betrachten wir das zufällige Auswählen einer siebenstelligen Telefonnummer (die Möglichkeit einer 0 an der ersten Stelle sei nicht ausgeschlossen).

(a) Definiere die Grundmenge Ω, die Menge Σ aller Ereignisse und das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ des Experiments.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Telefonnummer 0000000, 1234567 oder 5252525 lautet.

(c) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Telefonnummer keine 0 und keine 3 enthält.

(d) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Telefonnummer aus sieben verschiedenen Ziffern besteht.

(e) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Telefonnummer genau zweimal die 3 enthält.

3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 6

Seien A, B und C Ereignisse mit $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ und $P(C) = 0.5$. Ferner seien A und B unvereinbar, A und C unabhängig und $P(B|C) = 0.5$. Bestimme $P(A \cup B \cup C)$.

4 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Aufgabe 7

Eine Fußballmannschaft hat eine Siegchance von 75% je Spiel, falls ihr Kapitän in guter Form ist. Falls ihr Kapitän nicht gut in Form ist, dann betrage ihre Siegchance nur 40%. Bei 70% aller Spiele seiner Mannschaft sei der Kapitän in guter Form. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) die Mannschaft ein Spiel gewinnt.

(b) der Kapitän bei einem Spiel in guter Form ist, wenn die Mannschaft das Spiel nicht gewinnt.

Aufgabe 8

Die Professoren Kalteisen, Halbherz und Ruhbach teilten sich die vierwöchige Prüfungszeit, 5 Tage Kalteisen, 7 Tage Halbherz und 8 Tage Ruhbach. Die langjährigen Durchfallquoten sind bei Kalteisen 1/2, bei Halbherz 1/3 und bei Ruhbach 1/4. Wer an welchen Tagen prüfte, ist nicht bekannt. Am 1. August bestanden zwei der drei Kandidaten des Tages. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Halbherz geprüft?

5 Exkurs: Integration

Bestimme folgende Integrale:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \mathbb{I}_{(1,2]}(x) dx$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x) dx$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x+y} \mathbb{I}_{\Delta}(x,y) dx dy$, wobei $\Delta = \{(x,y) \in [0,\infty) : \ x+y \leq 1\}$.

Hinweis: Die Indikatorfunktion $\mathbb{I}_A$ auf einer Menge A ist definiert als

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x \in A \\ 0 & ; \ x \notin A \end{cases}$$