ulm university universität **uulm**

Dipl.-Math. Stefan Roth
SoSe 2017
4. April 2017

Brush-Up Stochastik - Übungsblatt 2

Besprechung: 5. April im Kurs.

1 Wiederholung: Totale Wkt., Satz von Bayes, Kombinatorik

Aufgabe 1

Beim Scrabble werden vor Spielstart aus einem Säckchen mit 102 Buchstaben (35 Vokale, 3 Umlaute, 62 Konsonanten und 2 Joker/Blanks) 7 zufällig herausgezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) 5 Konsonanten und 2 Vokale

(b) mindenstens 1 Joker

(c) kein Vokal

gezogen wird.

Aufgabe 2

Frau Müller bringt ihrem Sohn jeden Tag nach der Arbeit eine rotationssymmetrische schokoladige Leckerei mit, die ein wechselndes Spielzeug als Beigabe im Inneren enthält. Da sich ihr Sohn am meisten freut, wenn es sich bei dieser Beigabe um ein Auto handelt, hat Frau Müller darauf geachtet, bei welchem Supermarkt die Wahrscheinlichkeit dafür am höchsten ist. Sie hat dabei folgende Vermutung bzgl. der Wahrscheinlichkeiten für ein Auto aufgestellt:

Supermarkt A: 20 %, Supermarkt B: 30 %, Supermarkt C: 10 %, Supermarkt D: 5 %.

Da Frau Müller an ständig wechselnden Orten arbeitet, kauft sie mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten in den Supermärkten A-D ein:

Supermarkt A: 20 %, Supermarkt B: 40 %, Supermarkt C: 25 %, Supermarkt D: 15 %.

Nimm nun an, dass die von Frau Müller geschätzten Zahlen stimmen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Frau Müllers Sohn ein Auto findet?

(b) Er hat heute ein Auto gefunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Frau Müller im Supermarkt C eingekauft?

2 Zufallsvariablen

Aufgabe 3

Für welche $c \in \mathbb{R}$ handelt es sich bei folgenden Funktionen $\rho_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, um Wahrscheinlichkeitsdichten?

(a) $\rho_1(x) = \frac{c}{\sqrt{x-1}} \mathbb{1}_{(1,2]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\rho_2(x) = ce^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4

Zeige, dass es sich bei folgenden Funktionen $\rho_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,3,4\}$, jeweils um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt und bestimme die zugehörige Verteilungsfunktion[1] $F_i(x)$, $i \in \{1,2,3,4\}$.

(a) $\rho_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\rho_2(x) = (2-\alpha)x^{-\alpha+1} \mathbb{1}_{(0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $\alpha < 2$ fix.

(c) $\rho_3(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$ fix.

(d) $\rho_4(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-\alpha)^2}$, $x \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ fix. (Beachte Fußnote[2])

3 Momente von Zufallsvariablen

Aufgabe 5

Es sei f_p gegeben durch

$$f_p(x) = \begin{cases} 2p & \text{, falls } x \in \{-1, 1\} \\ p & \text{, falls } x = 0 \\ 1-5p & \text{, falls } x = 2 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

(a) Für welche p ist f_p eine Zähldichte?

(b) Es sei nun X eine Zufallsvariable mit Zähldichte f_p, p wie in (a). Bestimme $\mathbb{E}[X^r]$ für $r \in \mathbb{N}$ sowie $\mathsf{Var}(X)$.

Aufgabe 6

Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Wertebereich $X(\Omega)$. Sei weiterhin $Y = g(X)$. Bestimme in den folgenden Fällen $\mathbb{E}[Y^r]$, $r \in \mathbb{N}$, und $\mathsf{Var}(Y)$:

(a) $X(\Omega) = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, \ldots, 4\pi\} = \{k\pi/2,\ k = 0, \ldots, 8\}$ und X ist gleichverteilt[3], $g(x) = \sin(x)$.

(b) $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $X \sim \mathsf{Bin}(n,p)$, $p \in (0,1)$, $g(x) = 2^x$.

(c) $X(\Omega) = \mathbb{N}_0$ und $X \sim \mathsf{Poi}(\lambda)$, $\lambda > 0$, $g(x) = e^{2x}$. Beachte Fußnote[4].

Aufgabe 7

Bestimme jeweils $\mathbb{E}[X]$ und $\mathsf{Var}(X)$, falls

(a) $X \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

(b) $X \sim U(a,b)$, $0 < a < b < \infty$.

(c) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$.

---

[1] Zur Erinnerung: Für eine Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ gegeben durch $F(t) = \int_{-\infty}^{t} \rho(x)dx$, $t \in \mathbb{R}$.

[2] Hinweis: Es ist $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

[3] d.h. X nimmt alle Werte in $X(\Omega)$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit an.

[4] Hinweis: Verwende $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$.