Dipl.-Math. Stefan Roth SoSe 2017
12. April 2017

Brush-Up Stochastik - Übungsblatt 5

Besprechung: 12. und 13. April im Kurs.

1 Konfidenzintervalle und Hypothesentests

Aufgabe 1

Die jährliche Milchleistung von Kühen eines Bauernhofes kann als normalverteilt angesehen werden. Gemessen wurden folgende Milchleistungen von 5 Kühen in Litern:

$$35.1,\ 36.7,\ 33.0,\ 34.5,\ 35.6$$

Es wird davon ausgegangen, dass die Milchleistungen der Kühe unabhängig voneinander sind.

(a) Bestimme ein Konfidenzintervall für μ zum Niveau $1 - \alpha = 0.95$, wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung $\sigma = 1.5$ Liter beträgt.

(b) Wieviele Messungen müssen mindestens durchgeführt werden, damit man mit 95%-iger Sicherheit darauf vertrauen kann, dass der Fehler bei der Schätzung des Erwartungswertes[1] höchstens 0.5 Liter ist?

Aufgabe 2

Bei der Entnahme von 5 Bechern Latte Macchiato am Kaffeeautomaten der Cafeteria Southside werden folgende Füllmengen in ml gemessen:

$$299.7,\ 298.5,\ 301.0,\ 293.9,\ 309.3$$

Es wird davon ausgegangen, dass es sich bei den gegebenen Werten um die Realisierung einer i.i.d. $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsstichprobe handelt.

(a) Bestimme ein Konfidenzintervall für μ zum Niveau 0.95 bei unbekannter Varianz.

(b) Von einem Mitarbeiter erfährst du, dass die Standardabweichung 5ml beträgt. Konstruiere unter Einbeziehung dieser Information ein Konfidenzintervall für μ zum Niveau 0.95.

(c) Du vertraust dem Mitarbeiter nicht, dass die Standardabweichung so gering ist. Konstruiere ein Konfidenzintervall für die Varianz zum Niveau 0.95.

Aufgabe 3

Ein Getränkehersteller füllt seine Limonade auf zwei unterschiedlichen Maschinen in 0.5 Liter Flaschen ab. Die erwartete Abfüllmenge bei Maschinen 1 beträgt 0.48 Liter, bei Maschine 2 hingegen 0.52 Liter. Bei beiden Maschinen ist die Standardabweichung $\sigma = 0.01$ Liter. Nach Auskunft des Maschinenherstellers sind die Abfüllmengen der Maschinen normalverteilt. Zwecks Qualitätskontrolle wurden von beiden

[1] durch das Stichprobenmittel

Maschinen jeweils acht Flaschen (zufällig) entnommen. Dabei fand sich bei einer der beiden Stichproben eine erhöhte Anzahl von gesundheitsschädlichen Keimen. Unglücklicherweise wurde nach entnahme vergessen zu notieren welche Stichprobe von Maschine 1 bzw. welche von Maschine 2 stammt. Dies soll nun mit Hilfe eines Tests des Erwartungswertes θ geklärt werden. Betrachte dazu das Hypothesenpaar

$$H_0: \ \theta \in \Theta_0 = \{0.48\} \quad \text{vs.} \quad H_1: \ \theta \in \Theta_1 = \{0.52\}.$$

Der kritische Bereich des Tests sei gegeben durch $K = \{(x_1, \dots, x_n): \ T(x_1, \dots, x_n) > c\}$, wobei

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{n}\frac{\bar{x}_n - 0.48}{\sigma}.$$

(a) Nimm an, dass H_0 richtig ist. Wie muss $c \in \mathbb{R}$ gewählt werden, so, dass $P_\theta(\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1) = \alpha$ für beliebiges aber fest vorgegebenes $\alpha \in (0, 1)$?

(b) Bestimme die Macht des Tests φ.

(c) Die mit Keimen belastete Stichprobe besitze die Abfüllmengen (in Litern)

$$(x_1, \dots, x_8) = (0.473, 0.521, 0.485, 0.451, 0.465, 0.533, 0.512, 0.501).$$

Teste zum Niveau $\alpha = 0.01$, ob die Stichprobe von Maschine 1 stammt.

Aufgabe 4 (Stoff der Vorlesungen am 7. und 8. Februar)

Das Gewicht von 1000g Zuckerpaketen, die auf einer bestimmten Maschine abgefüllt werden, genüge einer $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung. Das folgende Tableau zeigt die Gewichtswerte einer Stichprobe von 15 zufällig entnommenen Zuckerpaketen.

984.51	990.22	992.07	999.23	996.17
992.49	998.79	989.09	993.15	991.42
1003.75	993.03	982.76	996.67	991.90

Teste zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese $H_0 : \mu = 1000$ gegen die Alternative $H_1 : \mu \neq 1000$, falls

(a) $\sigma^2 = 15$.

(b) σ^2 unbekannt ist.

Gib jeweils auch die Schlussfolgerungen an. Teste schließlich noch $H_0: \ \sigma^2 = 15$ gegen die Alternative $H_1: \ \sigma^2 \neq 15$.

Aufgabe 5

Es seien $X_{11}, \dots, X_{1n}$ sowie $X_{21}, \dots, X_{2n}$ zwei gepaarte Stichproben mit $(X_{1i}, X_{2i})^\top \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \Sigma)$, wobei $\mu = (\mu_1, \mu_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Hierbei bezeichnen $\sigma_1^2 = \mathsf{Var}(X_{1i})$, $\sigma_2^2 = \mathsf{Var}(X_{2i})$, sowie $\sigma_{12} = \mathsf{Cov}(X_{1i}, X_{2i})$, $i = 1, \dots, n$. In dieser Aufgabe soll ein Konfidenzintervall für $\mu_1 - \mu_2$ konstruiert werden.

(a) Es bezeichne $D_i = X_{1i} - X_{2i}$, $i = 1, \dots, n$. Zeige, dass $D_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})$.

(b) Konstruiere mit Hilfe von Aufgabe (a) ein Konfidenzintervall zum Niveau $\gamma \in [0, 1]$ für $\mu_1 - \mu_2$, falls Σ bekannt ist.

(c) Die folgenden Werte geben die Blutdruckwerte von 10 Patienten an. Dabei entsprechen die Werte in der ersten Zeile jeweils ihren Blutdruckwerten zu Beginn der Behandlung, die Werte in der zweiten Zeile den Blutdruckwerten nach zwei Monaten Behandlung mit einem Medikament.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_{1i}	144.20	139.10	139.50	139.00	138.20	141.40	138.10	137.30	140.30	138.70
x_{2i}	124.60	120.20	125.10	119.10	120.80	118.50	118.50	115.40	121.60	119.20

Berechne unter der Annahme, dass $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 5$ und $\sigma_{12} = 0.5$ gilt, das 95%-Konfidenzintervall für die Differenz $\mu_1 - \mu_2$ der Erwartungswerte.