

## Brush-Up Stochastik

## Übungsblatt 3

## Musterlösung

①  $X = (X_1, X_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit Zähldichte

| $X_1 \backslash X_2$      | 0     | 1     | 2     | 3     | (a) $P_{X_1} \downarrow$ |
|---------------------------|-------|-------|-------|-------|--------------------------|
| 0                         | $1/8$ | $1/4$ | $1/8$ | 0     | $1/2$                    |
| 1                         | 0     | $1/8$ | $1/4$ | $1/8$ | $1/2$                    |
| (a) $P_{X_2} \rightarrow$ | $1/8$ | $3/8$ | $3/8$ | $1/8$ | 1                        |

(b)  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

(i)  $h(x_1, x_2) = x_1$

$$E[h(X_1, X_2)] = E[X_1]$$

$$\stackrel{(a)}{=} 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(ii)  $h(x_1, x_2) = x_2$

$$E[h(X_1, X_2)] = E[X_2]$$

$$\stackrel{(a)}{=} 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

(iii)  $h(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

$$E[h(X_1, X_2)] = E[X_1 X_2]$$

$$= \sum_{(i,j) \in X(\Omega)} i \cdot j \cdot P(X_1=i, X_2=j)$$

$$= 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot 3 \cdot 0$$

$$+ 1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = 1$$

②  $(X_1, X_2) = X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit Dichte  
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_K(x_1, x_2)$ ,

wo.  $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ .

(a) 
$$\begin{aligned} f_{X_1}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x_2) dx_2 \\ &= \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{[1,1]}(t) dx_2 \\ &= \frac{1}{\pi} (\sqrt{1-t^2} - (-\sqrt{1-t^2})) \mathbb{1}_{[1,1]}(t) \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{1-t^2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

weg. Symmetrie der Argumente von  $f(x_1, x_2)$ ,  
 d.h.  $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$  ist

$$f_{X_2}(t) = f_{X_1}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot p_{X_2}(t) dt$$

$$= \int_{-1}^1 t \cdot \frac{2}{\pi} \sqrt{1-t^2} dt$$

symmetrisch zum Ursprung

↓

= 0

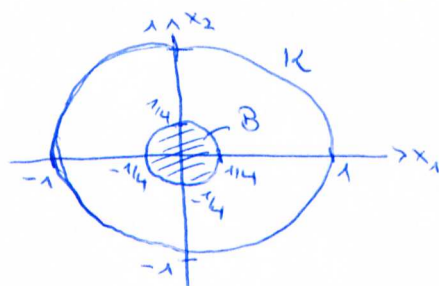
(b) Nein! Denn:

$$p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2) = \frac{4}{\pi^2} \sqrt{1-x_1^2} \sqrt{1-x_2^2} \mathbb{1}_{[-1,1]^2}(x_1, x_2)$$

$$\neq \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_K(x_1, x_2) = p(x_1, x_2)$$

d.h.  $p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) \neq p(x_1, x_2)$

(c)  $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{2}\}$



$$= \{-\sqrt{\frac{1}{4}-x_1^2} \leq x_2 \leq \sqrt{\frac{1}{4}-x_1^2}\}$$

$$\mathbb{P}((X_1, X_2) \in B) = \mathbb{P}(X_1 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], |X_2| \leq \sqrt{\frac{1}{4}-x_1^2})$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-x_1^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-x_1^2}} \frac{1}{\pi} dx_2 dx_1$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} 2 \sqrt{\frac{1}{4}-x_1^2} dx_1$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-1/4}^{1/4} \sqrt{\frac{1}{4} - x_1^2} dx_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \pi \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

beschreibt  
einen Halbkreis  
um 0 mit Radius  $1/4$

$$= \frac{1}{16}$$

Alternativ:  $P((X_1, X_2) \in B) = \frac{\text{Fläche } B}{\text{Fläche } K} = \frac{\pi \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\pi \cdot 1^2}$

$$= \frac{1}{16}$$

③

(a)  $X$ : Gesamtgewicht der 3 gez. Münzen

$$X(\Omega) = \{2.85, 2.9, 2.95, 3\}$$

Zähldichte von  $X$ :

| $R$      | 2.85                                              | 2.9                                               | 2.95                                              | 3                                                 |
|----------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $P_X(R)$ | $\frac{\binom{4}{3} \binom{6}{0}}{\binom{10}{3}}$ | $\frac{\binom{4}{2} \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}}$ | $\frac{\binom{4}{1} \binom{6}{2}}{\binom{10}{3}}$ | $\frac{\binom{4}{0} \binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}$ |
|          | $\frac{4}{120}$                                   | $\frac{36}{120}$                                  | $\frac{60}{120}$                                  | $\frac{20}{120}$                                  |

$$E[X] = 2.85 \cdot \frac{4}{120} + 2.9 \cdot \frac{36}{120} + 2.95 \cdot \frac{60}{120} + 3 \cdot \frac{20}{120}$$

$$= 2.94$$

(b)  $Y$ : Anzahl der ben. Versuche (d.h. bis zum ersten Mal  $X = 3$ )

$$p = P(X=3) \stackrel{(*)}{=} \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$Y \sim \text{Geo}(p)$ , d.h.

$$E[Y] = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

d.h. er benötigt im Mittel 6 Versuche.

⑤  $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $Y = X^2$ ,

$$P_X(k) = \frac{1}{5}, \quad k \in X(\Omega).$$

$$(a) \quad \text{Cov}(X, Y) = E[XY] - \overbrace{E[X]E[Y]}^{(*)=0}$$

$$(*) \quad E[X] = (-2) \cdot \frac{1}{5} + (-1) \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = E[XY]$$

$$= E[X \cdot X^2] = E[X^3]$$

$$= (-2)^3 \cdot \frac{1}{5} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{5} + 0^3 \cdot \frac{1}{5}$$

$$+ 1^3 \cdot \frac{1}{5} + 2^3 \cdot \frac{1}{5} = 0$$

d.h.  $X$  und  $Y$  sind unkorreliert.

(b) Nein! Denn z.B.

$$P(X=1, Y=1) = P(X=1, X^2=1)$$

$$\stackrel{(**)}{=} P(X=1) = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{aber } P(X=1)P(Y=1) &= P(X=1)(P(X=1)+P(X=-1)) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{25} \end{aligned}$$

$$\text{also } P(X=1)P(Y=1) \neq P(X=1, Y=1).$$

(\*\*) aus  $\{X=1\}$  folgt  $\{X^2=1\}$ , d.h. die Information  $\{X^2=1\}$  ist redundant.

④

Limit : 1024

Gesamtzahl möglicher Spiele:  $R_2$  mit

$$2^{R_2-1} = 1024$$

$$\Leftrightarrow R_2 = 11$$

(im 11. Spiel müssen  $2^{10} = 1024$  gesetzt werden!)

$X$  : Gesamtgewinn.

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \left\{ 1, -\sum_{R_2=0}^{10} 2^{R_2} \right\} \\ &= -\frac{1-2^{11}}{1-2} = 1-2^{11} \end{aligned}$$



$$P(\underbrace{X = 1-2^{11}}_{\text{alle Runden verloren!}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2^{11}}$$

$$\Rightarrow P(X=1) = 1 - \frac{1}{2^{11}}$$

Damit:

$$\begin{aligned} E[X] &= (1-2^{11}) \cdot \frac{1}{2^{11}} + 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{11}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{11}} - 1 + 1 - \frac{1}{2^{11}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X^2] \\ &= (1-2^{11})^2 \cdot \frac{1}{2^{11}} + 1^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{11}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{11}} - 2 + 2^{11} + 1 - \frac{1}{2^{11}} = 2^{11} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{also } \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{2^{11} - 1} \approx 45.24$$

$$\textcircled{7} \quad (a) \quad P(|\bar{X}_{100} - E[X_1]| > 0.1)$$

$$= P\left( \left| \sqrt{100} \cdot \frac{\bar{X}_{100} - E[X_1]}{1} \right| > \sqrt{100} \cdot 0.1 \right)$$

$$\stackrel{\text{ZGWS}}{\approx} 2 \cdot (1 - \Phi(1)) \stackrel{\text{Tab.}}{=} 2 \cdot (1 - 0.084134)$$

$$= 0.31782$$

(b) Gesucht:  $n \in \mathbb{N}$  so, dass

$$\underbrace{P(|\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]| > 0.1)} \leq 0.05$$

$$= P(\sqrt{n} |\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]| > \sqrt{n} \cdot 0.1)$$

ZGWS

$$\approx 2 (1 - \Phi(\sqrt{n} \cdot 0.1)) \stackrel{!}{\leq} 0.05$$

$$\Leftrightarrow \Phi(\sqrt{n} \cdot 0.1) \geq 1 - \frac{0.05}{2} = 0.975$$

Tab.

$$\Leftrightarrow 0.1 \sqrt{n} \geq 1.96$$

$$\Leftrightarrow n \geq \left( \frac{1.96}{0.1} \right)^2 = 384.16$$



6

$$p(x_1, x_2) = c \frac{1}{(1+x_1+x_2)^6} \mathbb{1}_{[0, \infty)^2}(x_1, x_2)$$

$$(a) \quad c \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x_1+x_2)^6} dx_1 dx_2$$

$$= c \int_0^{\infty} \left[ -\frac{1}{5} \frac{1}{(1+x_1+x_2)^5} \right]_{x_1=0}^{\infty} dx_2$$

$$= c \int_0^{\infty} \frac{1}{5} \frac{1}{(1+x_2)^5} dx_2$$

$$= c \left[ -\frac{1}{20} \frac{1}{(1+x_2)^4} \right]_{x_2=0}^{\infty}$$

$$= \frac{c}{20} \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow c = 20$$

$$\text{wg. } p(x_1, x_2) = \frac{20}{(1+x_1+x_2)^6} \mathbb{1}_{[0, \infty)^2}(x_1, x_2) \geq 0$$

ist  $p$  eine W-Dichte.

(b) In (a) bereits gesehen:

$$p_{X_2}(x) = \frac{c}{5} \frac{1}{(1+x)^5} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x)$$

$$= 4 \frac{1}{(1+x)^5} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x)$$

wg. Symmetrie:  $p_{X_1}(x) = p_{X_2}(x)$ ,

d.h.  $X_1$  und  $X_2$  bes. dieselbe Vertlg.

Damit:

$$E[X_1] = E[X_2] = \int_0^{\infty} \frac{4x}{(1+x)^5} dx$$

$$\begin{aligned} \text{P.I.} &= -\frac{x}{(1+x)^4} \Big|_{x=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^4} dx \end{aligned}$$

$$= \left[ -\frac{1}{3} \frac{1}{(1+x)^3} \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{3}$$

Außerdem:

$$E[X_1 X_2] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{20 x_1 x_2}{(1+x_1+x_2)^6} dx_1 dx_2$$

$$\begin{aligned} \text{P.I.} &= \int_0^{\infty} 20 x_2 \left( \underbrace{-\frac{1}{5} \frac{x_1}{(1+x_1+x_2)^5} \Big|_{x_1=0}^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} \frac{1}{5} \frac{1}{(1+x_1+x_2)^5} dx_1 \right) dx_2 \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} x_2 \left[ -\frac{1}{(1+x_1+x_2)^4} \right]_{x_1=0}^{\infty} dx_2$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x_2}{(1+x_2)^4} dx_2$$

$$\begin{aligned} \text{P.I.} &= \underbrace{-\frac{x_2}{3} \frac{1}{(1+x_2)^3} \Big|_{x_2=0}^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} \frac{1}{3} \frac{1}{(1+x_2)^3} dx_2 \end{aligned}$$

$$= \left[ -\frac{1}{6} \frac{1}{(1+x_2)^2} \right]_{x_2=0}^{\infty} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1 X_2] - \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_2]$$

$$= \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18} > 0$$

$\Rightarrow X_1, X_2$  uncorr.  $\Rightarrow X_1, X_2$  nicht unabh.

