

4. Übungsblatt Abgabe: 29. Juni, 16:15

Aufgabe 1: Normalisierungskonstanten aus dem Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung (2 Punkte + 4 Bonuspunkte¹)

Sei F eine Verteilungsfunktion aus dem Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung mit Parameter $\alpha > 0$ und seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n t + b_n) = \Phi_\alpha(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen diese durch $a(s) := a_{\lfloor s \rfloor}$ und $b(s) := b_{\lfloor s \rfloor}$ auf reellwertige s fort.

a) Zeige (für reelle s)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F^s(a(s)t + b(s)) = \Phi_\alpha(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Zeige, dass a regulär variierend ist und dass

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b(\lambda s) - b(s)}{a(s)} = 0, \quad \lambda > 0.$$

Aufgabe 2: Regulär variierende Funktionen (2 Punkte)

Zeige, dass eine Funktion f genau dann regulär variierend mit Index α an der Stelle 0 ist, wenn $f(1/x)$ regulär variierend mit Index $-\alpha$ (an der Stelle ∞) ist.

Aufgabe 3: Max-Anziehungsbereiche (4+6=10 Punkte)

a) In der Versicherungsmathematik wird für die Modellierung der Schadenhöhen manchmal die sogenannte Burr-Verteilung mit Verteilungsfunktion

$$F(t) = 1 - \left(\frac{C}{C + t^\beta} \right)^\alpha, \quad t \geq 0,$$

verwendet. Dabei sind $C > 0$, $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ Parameter. Zeige, dass die Burr-Verteilung im Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung $\Phi_{\alpha\beta}$ liegt, und gib explizit Folgen a_n und b_n an, für die $(M_n - b_n)/a_n$ gegen $\Phi_{\alpha\beta}$ konvergiert.

b) Seien $X_1, X_2, \dots \sim \text{Exp}(1)$ unabhängige Zufallsvariablen und bezeichne $m_n := \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Gib Folgen a_n und b_n an mit $(m_n - b_n)/a_n \xrightarrow{d} -Z$, $n \rightarrow \infty$, wobei $Z \sim \Psi_1$.

Aufgabe 4: Verteilungen, die in keinem Max-Anziehungsbereich liegen (6 Punkte)

Zeige, dass die Verteilungsfunktion

$$F(t) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{\log t} & \text{falls } t > e \\ 0 & \text{falls } t \leq e \end{cases}$$

in keinem Max-Anziehungsbereich liegt.

Hinweis: Unterscheide beim Nachweis, dass F nicht im Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung liegt, folgende Fälle:

1. $g(x)/x$ ist klein
2. $g(x)/x$ ist groß

¹Bonuspunkte sind nicht auf andere Blätter übertragbar. Erhält ein Student z.B. 18 Punkte und 3,5 Bonuspunkte, so verfallen 1,5 Bonuspunkte.