



ulm university

universität
uulm

EXTREMWERTTHEORIE

SKRIPT
DR. JÜRGEN KAMPF

UNIVERSITÄT ULM
INSTITUT FÜR STOCHASTIK

Vorwort

Dies ist ein Skript zur Vorlesung “Extremwerttheorie” im Sommersemester 2017 an der Universität Ulm. Bedanken möchte ich mich bei Zakhar Kabluchko, für die Erlaubnis, ein Skript zu erstellen, das in wesentlichen Teilen auf seinem Skript basiert. Sein Skript ist unter <http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/kabluchko/> zu finden.

Zakhar Kabluchko wiederum bedankt sich bei zahlreichen weiteren Personen. Aus seinem Vorwort:

Dies ist ein Skript zur Vorlesung “Extremwerttheorie”, die an der Universität Ulm (im Wintersemester 2011/12 und Sommersemester 2014) und an der Universität Münster (im Sommersemester 2015) gehalten wurde. Die erste L^AT_EX-Version des Skripts wurde von Herrn Benjamin Tempel erstellt. Danach wurde das Skript von mir mehrmals korrigiert, überarbeitet und ergänzt. Ich bedanke mich bei Frau Judith Olszewski, die eine frühere Version des Skripts kritisch durchgelesen und zahlreiche Verbesserungsvorschläge gemacht hat. Ich bedanke mich außerdem bei Wolfgang König, Michael Stolz und zahlreichen weiteren Kollegen für nützliche Hinweise zu einzelnen Kapiteln des Skripts. Diese Version ist vorläufig. In Zukunft soll das Skript weiter überarbeitet und ergänzt werden.

Literatur

Es gibt sehr viele Bücher über Extremwerttheorie. Hier ist eine Auswahl:

1. P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*.
2. S. Resnick. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*.
3. L. de Haan, A. Ferreira. *Extreme Value Theory: An Introduction*.
4. S. Resnick. *Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling*
5. M. Falk, J. Hüsler, R.-D. Reiss. *Laws of Small Numbers: Extremes and Rare Events*.
6. M. R. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootzén. *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*.
7. S. Coles. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*.
8. J. Beirlant, Y. Goegebeur, J. Segers, J. Teugels. *Statistics of Extremes: Theory and Applications*.
9. E. J. Gumbel. *Statistics of Extremes*.
10. J. Galambos. *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*.
11. V. Nevzorov. *Records: Mathematical Theory*.
12. L. de Haan. *On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes*.
13. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels. *Regular Variation*.
14. D. Pfeifer. *Einführung in die Extremwertstatistik*.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
Literatur	ii
Kapitel 1. Extremwertverteilungen	1
1.1. Verteilung des Maximums	1
1.2. Definition der Extremwertverteilungen und deren Max-Anziehungsbereiche	3
1.3. Drei Beispiele von Extremwertverteilungen: Gumbel, Fréchet, Weibull	4
1.4. Satz von Fisher–Tippett–Gnedenko	8
1.5. Jenkinson–von Mises–Darstellung	10
Kapitel 2. Satz von Fisher–Tippett–Gnedenko	11
2.1. Eindeutigkeit der Normierungskonstanten	11
2.2. Max-stabile Verteilungen	12
2.3. Charakterisierung der max-stabilen Verteilungen	14
Kapitel 3. Regulär variierende Funktionen	17
Kapitel 4. Max-Anziehungsbereiche	20
4.1. Tailfunktion und Quantilfunktion	20
4.2. Max-Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung Φ_α	21
4.3. Max-Anziehungsbereich der Weibull–Verteilung Ψ_α	25
4.4. Max-Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung Λ	27
Kapitel 5. Statistik der Extremwertverteilungen	29
5.1. Statistik der Blockmaxima: GEV–Verteilungen	29
5.2. Modell-Verifikation	32
5.3. Peaks over Threshold: Statistik der GP–Verteilungen	33

KAPITEL 1

Extremwertverteilungen

1.1. Verteilung des Maximums

Seien X_1, X_2, \dots unabhängige und identisch verteilte (u.i.v.) Zufallsvariablen. Mit M_n bezeichnen wir das **Maximum** von X_1, \dots, X_n :

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Satz 1.1.1. Die Verteilungsfunktion von M_n ist gegeben durch

$$\mathbb{P}[M_n \leq t] = F^n(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Hierbei ist $F^n(t)$ die punktweise n -te Potenz von $F(t)$.

BEWEIS. Aus der Definition des Maximums M_n folgt, dass

$$\mathbb{P}[M_n \leq t] = \mathbb{P}[\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq t] = \mathbb{P}[X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t].$$

Da X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt sind, gilt

$$\mathbb{P}[X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t] = \mathbb{P}[X_1 \leq t] \cdot \dots \cdot \mathbb{P}[X_n \leq t] = F^n(t).$$

Zusammen ergibt sich $\mathbb{P}[M_n \leq t] = F^n(t)$. □

Aufgabe 1.1.2. Seien X_1, \dots, X_n u.i.v. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F . Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion des Minimums $m_n := \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

Aufgabe 1.1.3. Seien X_1, \dots, X_n u.i.v. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F . Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion von m_n und M_n , d.h. berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[m_n \leq x, M_n \leq y]$.

Wir werden uns für die Eigenschaften von M_n für große Werte von n interessieren. Im folgenden Satz berechnen wir den Wert, gegen den die Zufallsvariable M_n für $n \rightarrow \infty$ in Wahrscheinlichkeit konvergiert.

Definition 1.1.4. Der **rechte Endpunkt** der Verteilungsfunktion F ist definiert durch

$$x^* = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid F(t) < 1\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid F(t) = 1\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Erreicht die Verteilungsfunktion F nie den Wert 1, so ist $x^* = +\infty$.

Der rechte Endpunkt kann endlich oder $+\infty$ sein:

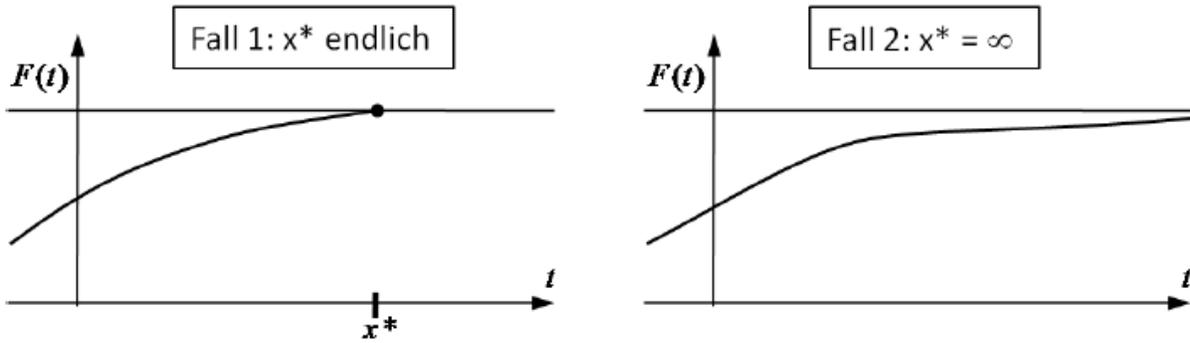


ABBILDUNG 1. Veranschaulichung von x^*

Der rechte Endpunkt x^* ist das Supremum aller Werte, die die Zufallsvariable X_1 annehmen kann, wobei aber Nullmengen ignoriert werden. Es ist

$$x^* = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X_1 \geq t) > 0\} =: \text{esssup } X_1$$

das **wesentliche Supremum** von X_1 .

Satz 1.1.5. Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert die Zufallsvariable M_n in Wahrscheinlichkeit gegen den Wert x^* .

BEWEIS. Wir betrachten zwei Fälle.

FALL 1. Sei zuerst x^* endlich. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $F(x^* - \varepsilon) < 1$, wobei die Ungleichung strikt ist. Aus Satz 1.1.1 folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[M_n \leq x^* - \varepsilon] = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x^* - \varepsilon) = 0.$$

Außerdem gilt $\mathbb{P}[M_n \geq x^* + \varepsilon] = 0$. Es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|M_n - x^*| \geq \varepsilon] = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{P}[M_n \leq x^* - \varepsilon] + \mathbb{P}[M_n \geq x^* + \varepsilon]) = 0.$$

Somit gilt $M_n \xrightarrow{P} x^*$.

FALL 2. Sei nun $x^* = +\infty$. Wir zeigen, dass für jedes noch so großes $A \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[M_n < A] = 0.$$

Aus $x^* = \infty$ folgt, dass $F(A) < 1$, wobei die Ungleichung strikt ist. Mit Satz 1.1.1 folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[M_n < A] = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(A) = 0.$$

Somit gilt $M_n \xrightarrow{P} +\infty$. □

Bemerkung 1.1.6. Da die Folge $M_n(\omega)$ für jedes feste $\omega \in \Omega$ monoton wachsend ist, konvergiert sie entweder gegen eine endliche Zahl oder sie konvergiert gegen unendlich. Der fast

sichere Limes von $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ muss aber mit dem Limes in Wahrscheinlichkeit übereinstimmen. Also konvergiert $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sogar fast sicher gegen x^* .

1.2. Definition der Extremwertverteilungen und deren Max-Anziehungsbereiche

Wir werden uns für die Verteilungsfunktion des Maximums $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ für große Werte von n interessieren.

Zunächst erinnern wir uns an einen Sätze über die Verteilung des arithmetischen Mittelwerts \bar{X} einer Stichprobe. Der **zentrale Grenzwertsatz** besagt, dass für u.i.v. Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$ die Verteilungskonvergenz

$$\frac{\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 1)$$

gilt, wobei $N(0, 1)$ eine Standardnormalverteilung bezeichnet.

Wir wollen nun ein Analogon des zentralen Grenzwertsatzes für das Maximum M_n herleiten. Seien also X_1, X_2, \dots u.i.v. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F . Wir fragen uns, ob es Folgen von Konstanten $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ und eine Verteilungsfunktion G gibt, so dass für $n \rightarrow \infty$ die folgende Verteilungskonvergenz gilt:

$$(1.2.1) \quad \frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} G.$$

Es sei bemerkt, dass wir in (1.2.1) eine Normierung von M_n mit beliebigen Folgen a_n und b_n (und nicht nur mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung) zulassen, da in vielen interessanten Fällen der Erwartungswert und die Varianz gar nicht existieren.

Die Verteilungskonvergenz in (1.2.1) bedeutet, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq t \right] = G(t)$$

für alle Stetigkeitspunkte t von G . Eine äquivalente Formulierung ist diese:

$$(1.2.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n t + b_n) = G(t)$$

für alle Stetigkeitspunkte t von G .

Wenn (1.2.1) bzw. (1.2.2) gilt, so sagen wir, dass G eine **Extremwertverteilung** ist und dass die Verteilungsfunktion F (bzw. die Zufallsvariablen X_i) im **Max-Anziehungsbereich** von G liegt.

Bemerkung 1.2.1. Es gibt einen Spezialfall von (1.2.1) und (1.2.2), der nicht interessant ist und den wir deshalb ausschließen. Eine Zufallsvariable Z bzw. deren Verteilungsfunktion $G(t) = \mathbb{P}[Z \leq t]$ heißt **degeneriert**, wenn es einen Wert c mit $\mathbb{P}[Z = c] = 1$, bzw.

$$(1.2.3) \quad G(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$

gibt. Für jede Verteilungsfunktion F kann man durch die “falsche” Wahl der Konstanten a_n, b_n erreichen, dass (1.2.1) bzw. (1.2.2) mit einer degenerierten Verteilungsfunktion G gilt.

Man kann zum Beispiel $b_n = 0$ und a_n derart schnell steigend wählen, dass M_n/a_n gegen 0 in Verteilung konvergiert (Übungsaufgabe). Deshalb werden wir im Folgenden die degenerierten Verteilungsfunktionen G der Form (1.2.3) aus unseren Definitionen ausschließen.

Definition 1.2.2. Der **Max-Anziehungsbereich** einer nichtdegenerierten Verteilungsfunktion G besteht aus allen Verteilungsfunktionen F , für die es zwei Folgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$(1.2.4) \quad \frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} G$$

für $M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\}$, wobei $X_1, \dots, X_n \sim F$ u.i.v. sind.

Den Max-Anziehungsbereich von G werden wir mit $\text{MDA}(G)$ (**maximum domain of attraction**) bezeichnen. Wir werden im Folgenden sehen, dass es nur sehr wenige Verteilungsfunktionen G mit einem nicht-leeren Max-Anziehungsbereich gibt.

Bemerkung 1.2.3. Wir machen in diesem Skript keinen Unterschied zwischen einer Verteilung (die ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R} ist) und der dazugehörigen Verteilungsfunktion. Zum Beispiel bezeichnen wir oft eine Verteilungsfunktion als “Extremwertverteilung”.

Definition 1.2.4. Eine nichtdegenerierte Verteilung(-sfunktion) G heißt eine **Extremwertverteilung**, wenn der Max-Anziehungsbereich von G nicht leer ist.

Somit ist G eine Extremwertverteilung, wenn es eine Verteilungsfunktion F und zwei Folgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass (1.2.4) gilt.

1.3. Drei Beispiele von Extremwertverteilungen: Gumbel, Fréchet, Weibull

Mit der obigen Definition ist es nicht klar, ob Extremwertverteilungen überhaupt existieren. Im Folgenden werden wir drei Beispiele von Extremwertverteilungen (oder sogar Familien von Extremwertverteilungen) konstruieren. Später werden wir zeigen, dass es bis auf lineare Transformationen keine weiteren Extremwertverteilungen gibt.

Wir erinnern daran, dass wir mit X_1, X_2, \dots u.i.v. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F bezeichnen. Weiterhin, sei $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

Gumbel-Verteilung $\Lambda(t) = e^{-e^{-t}}$

Definition 1.3.1. Eine Zufallsvariable hat **Gumbel-Verteilung**, wenn Ihre Verteilungsfunktion die folgende Gestalt hat:

$$\Lambda(t) = e^{-e^{-t}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

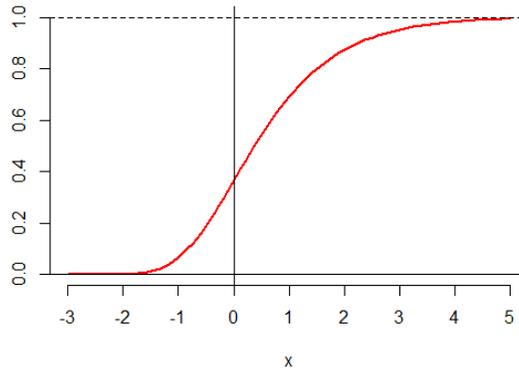


ABBILDUNG 2. Verteilungsfunktion der Gumbel-Verteilung.

Das nächste Beispiel zeigt, dass die Gumbel-Verteilung eine Grenzwertverteilung für Maxima von u.i.v. exponentialverteilten Zufallsvariablen ist.

Beispiel 1.3.2. Die Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter 1, d.h.

$$F(t) = 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Dann konvergieren für $n \rightarrow \infty$ die Zufallsvariablen $M_n - \log n$ in Verteilung gegen Λ , d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[M_n - \log n \leq t] = e^{-e^{-t}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Mit Satz 1.1.1 gilt

$$\mathbb{P}[M_n - \log n \leq t] = \mathbb{P}[M_n \leq t + \log n] = F^n(t + \log n).$$

Die Zufallsvariablen X_i sind exponentialverteilt und $t + \log n > 0$ für n hinreichend groß. Es folgt, dass bei einem hinreichend großen n ,

$$\mathbb{P}[M_n - \log n \leq t] = (1 - e^{-(t+\log n)})^n = \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-e^{-t}}.$$

Somit gilt $M_n - \log n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \Lambda$.

Dies ist das erste von vielen Malen, dass wir folgendes Lemma der Analysis benutzt haben.

Lemma 1.3.3. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $u := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{u_n}{n}\right)^n = e^u.$$

Bemerkung 1.3.4. Laut Beispiel 1.3.2 list die Exponentialverteilung im Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung:

$$\text{Exp}(1) \in \text{MDA}(\Lambda).$$

Die Gumbel-Verteilung ist somit eine Extremwertverteilung. Man kann Beispiel 1.3.2 wie folgt interpretieren: Für großes n nimmt das Maximum M_n Werte an, die sich von dem Wert $\log n$ um eine approximativ Gumbel-verteilte "Fluktuation" unterscheiden.

Fréchet-Verteilung $\Phi_\alpha(t) = e^{-t^{-\alpha}}, t > 0$

Definition 1.3.5. Eine Zufallsvariable heißt Fréchet-verteilt mit Parameter $\alpha > 0$, wenn ihre Verteilungsfunktion die folgende Gestalt hat:

$$\Phi_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-t^{-\alpha}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

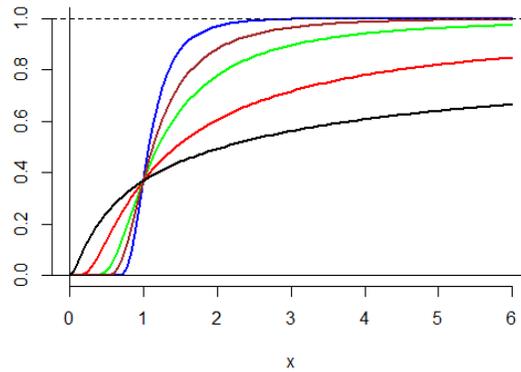


ABBILDUNG 3. Verteilungsfunktionen der Fréchet-Verteilungen mit $\alpha = 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 5.0$.

Das nächste Beispiel zeigt, dass die Fréchet-Verteilung eine Extremwertverteilung ist.

Beispiel 1.3.6. Die Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots seien Pareto-verteilt mit Parameter $\alpha > 0$, d.h.

$$F(t) = \begin{cases} 1 - t^{-\alpha}, & t \geq 1, \\ 0, & t \leq 1. \end{cases}$$

Dann konvergieren für $n \rightarrow \infty$ die Zufallsvariablen $n^{-\frac{1}{\alpha}} M_n$ in Verteilung gegen Φ_α , d.h. es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\frac{M_n}{n^{1/\alpha}} \leq t \right] = \begin{cases} e^{-t^{-\alpha}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Beweis: Sei $t > 0$ beliebig. Mit Satz 1.1.1 erhalten wir, dass

$$\mathbb{P} \left[\frac{M_n}{n^{1/\alpha}} \leq t \right] = \mathbb{P}[M_n \leq tn^{1/\alpha}] = F^n(tn^{1/\alpha}).$$

Da die Zufallsvariablen X_i Pareto-verteilt sind und $tn^{1/\alpha} > 1$ für hinreichend großes n , ergibt sich, dass

$$\mathbb{P}\left[\frac{M_n}{n^{1/\alpha}} \leq t\right] = \left(1 - \frac{1}{(tn^{1/\alpha})^\alpha}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{t^\alpha n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t^{-\alpha}}.$$

Für $t \leq 0$ gilt $\mathbb{P}[n^{-1/\alpha} M_n \leq t] = 0$. Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung 1.3.7. Man kann Beispiel 1.3.6 wie folgt interpretieren: Für großes n nimmt das Maximum M_n sehr große Werte auf der Skala $n^{1/\alpha}$ an. Reskaliert man M_n mit dem Faktor $n^{-1/\alpha}$, so erhält man approximativ Fréchet-verteilte Werte.

Weibull-Verteilung $\Psi_\alpha(t) = e^{-(-t)^\alpha}, t < 0$

Definition 1.3.8. Eine Zufallsvariable heißt **Weibull-verteilt** mit Parameter $\alpha > 0$, wenn ihre Verteilungsfunktion die folgende Form hat:

$$\Psi_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-(-t)^\alpha}, & t \leq 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

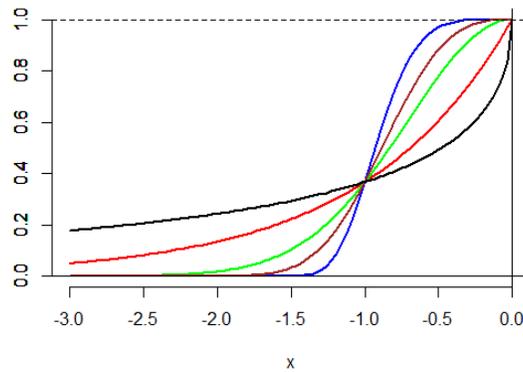


ABBILDUNG 4. Verteilungsfunktionen der Weibull-Verteilungen mit $\alpha = 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 5.0$.

Das nächste Beispiel zeigt, dass die Weibull-Verteilung eine Extremwertverteilung ist.

Beispiel 1.3.9. Seien die Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots unabhängig mit der Verteilungsfunktion

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1, \\ 1 - (-t)^\alpha, & t \in [-1, 0], \\ 1, & t \geq 0, \end{cases}$$

wobei $\alpha > 0$ ein Parameter ist. Dann konvergieren für $n \rightarrow \infty$ die Zufallsvariablen $n^{1/\alpha}M_n$ in Verteilung gegen Ψ_α , d.h. es gilt

$$(1.3.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[n^{1/\alpha}M_n \leq t] = \begin{cases} e^{-(-t)^\alpha}, & t \leq 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Sei $t \leq 0$ beliebig. Mit Satz 1.1.1 erhalten wir, dass

$$\mathbb{P}[n^{1/\alpha}M_n \leq t] = \mathbb{P}[M_n \leq tn^{-1/\alpha}] = F^n(tn^{-1/\alpha}).$$

Für n hinreichend groß ist $tn^{-1/\alpha} \in [-1, 0]$. Aus der Formel für die Verteilungsfunktion F folgt, dass

$$\mathbb{P}[n^{1/\alpha}M_n \leq t] = (1 - (-tn^{-1/\alpha})^\alpha)^n = \left(1 - \frac{(-t)^\alpha}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-(-t)^\alpha}.$$

Für $t \geq 0$ gilt $\mathbb{P}[n^{1/\alpha}M_n \leq t] = 1$, denn $M_n \leq 0$ f.s. Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung 1.3.10. Man kann Beispiel 1.3.9 wie folgt interpretieren: Für großes n nähert sich das Maximum M_n dem Wert 0 von unten an. Dabei nimmt M_n sehr kleine negative Werte auf der Skala $n^{-1/\alpha}$ an. Reskaliert man M_n mit dem Faktor $n^{1/\alpha}$, so erhält man approximativ Weibull-verteilte Fluktuationen.

1.4. Satz von Fisher–Tippett–Gnedenko

Wir haben folgende Extremwertverteilungen konstruiert: Die Gumbel-Verteilung Λ , die Fréchet-Verteilung Φ_α (wobei $\alpha > 0$) und die Weibull-Verteilung Ψ_α (wobei $\alpha > 0$). Weitere Beispiele von Extremwertverteilungen können konstruiert werden, indem wir auf die oben genannten Verteilungen lineare Transformationen anwenden.

Definition 1.4.1. Zwei Zufallsvariablen Z_1 und Z_2 sind **vom gleichen Typ**, wenn es $c > 0$ und $d \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$Z_1 \stackrel{d}{=} cZ_2 + d.$$

Notation: $Z_1 \bowtie Z_2$.

Bezeichnen wir mit F_1 und F_2 die Verteilungsfunktionen von Z_1 und Z_2 , so kann man die obige Bedingung wie folgt formulieren:

$$F_1(t) = \mathbb{P}[Z_1 \leq t] = \mathbb{P}[cZ_2 + d \leq t] = \mathbb{P}\left[Z_2 \leq \frac{t-d}{c}\right] = F_2\left(\frac{t-d}{c}\right).$$

Definition 1.4.2. Zwei Verteilungsfunktionen F_1 und F_2 sind **vom gleichen Typ**, wenn es $c > 0$ und $d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$

$$F_1(t) = F_2\left(\frac{t-d}{c}\right).$$

Notation: $F_1 \bowtie F_2$.

Beispiel 1.4.3. Die Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$ ist vom gleichen Typ wie die Gleichverteilung auf einem beliebigen Intervall $[a, b]$. Die Normalverteilung mit beliebigen Parametern ist vom gleichen Typ wie die Standardnormalverteilung.

Aufgabe 1.4.4. Zeigen Sie, dass \bowtie eine Äquivalenzrelation ist, d.h.

- (1) $F \bowtie F$.
- (2) $F \bowtie G \Rightarrow G \bowtie F$.
- (3) $F \bowtie G, G \bowtie H \Rightarrow F \bowtie H$.

Proposition 1.4.5. Hat eine Zufallsvariable Z (mit Verteilungsfunktion $G(t)$) eine Extremwertverteilung, so hat für beliebige $c > 0$ und $d \in \mathbb{R}$ auch die Zufallsvariable $cZ + d$ (mit Verteilungsfunktion $G\left(\frac{t-d}{c}\right)$) eine Extremwertverteilung.

BEWEIS. Die Voraussetzung, dass die Zufallsvariable Z einer Extremwertverteilung gehorcht, bedeutet, dass es unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots und Folgen $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\} - b_n}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z.$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\} - (b_n - da_n/c)}{a_n/c} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} cZ + d.$$

Somit hat die Zufallsvariable $cZ + d$ ebenfalls eine Extremwertverteilung. □

Bemerkung 1.4.6. Aus dem Beweis der vorstehenden Proposition folgt auch, dass die Max-Anziehungsbereiche der Verteilungsfunktionen $G(t)$ und $G\left(\frac{t-d}{c}\right)$ gleich sind.

Aus Proposition 1.4.5 folgt, dass für beliebige $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$, die folgenden Verteilungen Extremwertverteilungen sind:

Verteilungen vom Gumbel-Typ:

$$(1.4.1) \quad \Lambda\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \exp\left\{-e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}\right\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Verteilungen vom Fréchet-Typ (mit Parameter $\alpha > 0$):

$$(1.4.2) \quad \Phi_\alpha\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}\right\}, & \text{falls } t > \mu, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Verteilungen vom Weibull-Typ (mit Parameter $\alpha > 0$):

$$(1.4.3) \quad \Psi_\alpha\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(-\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^\alpha\right\}, & \text{falls } t < \mu, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein zentraler Satz der Extremwerttheorie besagt, dass es keine weiteren Extremwertverteilungen gibt:

Satz 1.4.7 (Fisher–Tippett (1928), Gnedenko (1943)). Jede Extremwertverteilung gehört zu einer der drei Familien (1.4.1), (1.4.2), (1.4.3).

1.5. Jenkinson–von Mises–Darstellung

Es gibt eine Darstellung (*Jenkinson–von Mises–Darstellung*), die alle drei Familien (1.4.1), (1.4.2), (1.4.3) als Spezialfälle beinhaltet. Betrachte nämlich die folgende Familie von Verteilungsfunktionen (parametrisiert durch $\gamma \in \mathbb{R}$)

$$G_\gamma(t) = \begin{cases} \exp\{-(1 + \gamma t)^{-1/\gamma}\}, & \text{falls } 1 + \gamma t > 0, \\ 0, & \text{falls } \gamma > 0 \text{ und } t \leq -1/\gamma, \\ 1, & \text{falls } \gamma < 0 \text{ und } t \geq -1/\gamma. \end{cases}$$

Folgendes lässt sich nun leicht überprüfen:

- (1) Für $\gamma > 0$ ist G_γ vom gleichen Typ wie die Fréchet–Verteilung $\Phi_{1/\gamma}(t) = e^{-t^{-1/\gamma}}$, $t > 0$.
- (2) Für $\gamma < 0$ ist G_γ vom gleichen Typ wie die Weibull–Verteilung $\Psi_{-1/\gamma}(t) = e^{-(-t)^{-1/\gamma}}$, $t < 0$.
- (3) Für $\gamma = 0$ ist $(1 + \gamma t)^{-1/\gamma}$ nicht wohldefiniert. Wir interpretieren diesen Term dann als Grenzwert für $\gamma \rightarrow 0$:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} (1 + \gamma t)^{-1/\gamma} = e^{-t}.$$

Somit ist $G_0(t) = e^{-e^{-t}}$, $t \in \mathbb{R}$, die Gumbel–Verteilung.

Jede Extremwertverteilung hat also die Form $G_\gamma(ct + d)$ mit passenden Parametern $\gamma \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $d \in \mathbb{R}$.

Eine in der Form $G_\gamma(ct + d)$ dargestellte Extremwertverteilung wird in der Statistik auch *GEV–Verteilung* genannt (*General Extreme–Value Distribution*).

Satz von Fisher–Tippett–Gnedenko

In diesem Kapitel beweisen wir den Satz von Fisher–Tippett–Gnedenko, der die Extremwertverteilungen beschreibt.

Satz 2.0.1 (Satz von Fisher–Tippett (1928), Gnedenko (1943)). Eine Verteilungsfunktion G ist eine Extremwertverteilung genau dann, wenn einer der drei folgenden Fälle vorliegt:

- (1) G ist vom Gumbel–Typ, d.h. $G(t) = \Lambda\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$ für $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.
- (2) G ist vom Fréchet–Typ, d.h. $G(t) = \Phi_\alpha\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$ für $\alpha > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.
- (3) G ist vom Weibull–Typ, d.h. $G(t) = \Psi_\alpha\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$ für $\alpha > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Für den Beweis benötigen wir einige Hilfsmittel.

2.1. Eindeutigkeit der Normierungskonstanten

Seien Z_1, Z_2, \dots Zufallsvariablen und $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ Folgen von Normierungskonstanten mit

$$(2.1.1) \quad \frac{Z_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z.$$

Wir stellen uns die Frage, wie stark wir die Konstanten a_n, b_n verändern können, ohne dass die Konvergenz in (2.1.1) zerstört wird.

Proposition 2.1.1. Es gelte (2.1.1). Seien $\tilde{a}_n > 0$ und $\tilde{b}_n \in \mathbb{R}$ zwei weitere Folgen.

(i) Falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{a}_n}{a_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{b}_n - b_n}{a_n} = 0,$$

dann gilt

$$\frac{Z_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z.$$

(ii) Falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{a}_n}{a_n} = a \in (0, \infty), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{b}_n - b_n}{a_n} = b \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt auch

$$\frac{Z_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \frac{Z - b}{a}.$$

BEWEIS. Es gilt

$$(2.1.2) \quad \frac{Z_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} = \frac{a_n}{\tilde{a}_n} \cdot \frac{Z_n - \tilde{b}_n}{a_n} = \frac{a_n}{\tilde{a}_n} \cdot \left(\frac{Z_n - b_n}{a_n} - \frac{\tilde{b}_n - b_n}{a_n} \right).$$

Nach dem Lemma von Slutsky konvergiert die rechte Seite in Verteilung – unter den Voraussetzungen von Teil (i) gegen Z , unter den Voraussetzungen von Teil (ii) gegen $\frac{Z-b}{a}$. \square

Satz 2.1.2 (“Convergence of types theorem”, Chintschin). Seien Z_1, Z_2, \dots Zufallsvariablen und $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ sowie $\tilde{a}_n > 0$, $\tilde{b}_n \in \mathbb{R}$ Normierungsfolgen mit

$$\frac{Z_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z, \quad \frac{Z_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \tilde{Z},$$

wobei die Zufallsvariablen Z, \tilde{Z} nicht degeneriert seien. Dann existieren die Grenzwerte

$$(2.1.3) \quad a := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{a}_n}{a_n} \in (0, \infty), \quad b := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{b}_n - b_n}{a_n} \in \mathbb{R}$$

und es gilt $\tilde{Z} \stackrel{d}{=} (Z - b)/a$.

BEWEIS. Weggelassen. Referenz: P. Billingsley, *Probability and measure* (Seite 193, Thm. 4.2 in der Ausgabe von 1986; Seite 204 in der Ausgabe von 2012). \square

Lemma 2.1.3. Sei Z eine nicht degenerierte Zufallsvariable und $c > 0$, $d \in \mathbb{R}$ Konstanten mit $cZ + d \stackrel{d}{=} Z$. Dann ist $c = 1$, $d = 0$.

BEWEIS. Weggelassen. Referenz: P. Billingsley, ab Seite 193/204. \square

2.2. Max-stabile Verteilungen

Definition 2.2.1. Eine nicht degenerierte Verteilungsfunktion G heißt **max-stabil**, falls es für alle $n \in \mathbb{N}$ Konstanten $c_n > 0$ und $d_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$G^n(c_n t + d_n) = G(t).$$

Mit anderen Worten, für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist G^n vom gleichen Typ wie G .

Sind X_1, X_2, \dots u.i.v. Zufallsvariablen mit einer max-stabilen Verteilung, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\} - d_n}{c_n} \stackrel{d}{=} X_1.$$

Das heißt, das Maximum von n u.i.v. Zufallsvariablen mit einer max-stabilen Verteilung hat bis auf eine affine Transformation die gleiche Verteilung wie eine einzige Zufallsvariable.

Beispiel 2.2.2. Die Gumbel-Verteilungsfunktion $\Lambda(t) = e^{-e^{-t}}$ ist max-stabil, denn

$$\Lambda^n(t + \log n) = e^{-ne^{-(t+\log n)}} = e^{-e^{-t}} = \Lambda(t).$$

Analog lässt sich zeigen, dass Fréchet-Verteilung Φ_α und Weibull-Verteilung Ψ_α max-stabil sind.

Die Klasse der max-stabilen Verteilungen stimmt mit der Klasse der Extremwertverteilungen überein:

Satz 2.2.3. Eine Verteilungsfunktion G ist max-stabil genau dann, wenn G eine Extremwertverteilung ist.

BEWEIS. SCHRITT 1. “ \Rightarrow ” Sei G max-stabil. Dann gibt es $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$, so dass $G^n(c_n t + d_n) = G(t)$. Es gilt also für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(c_n t + d_n) = G(t),$$

weshalb G eine Extremwertverteilung ist.

SCHRITT 2. “ \Leftarrow ” Sei G eine Extremwertverteilung. Dann gibt es eine Verteilungsfunktion F und $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$(2.2.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n t + b_n) = G(t)$$

für alle Stetigkeitspunkte von G . Damit gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{nk}(a_{nk} t + b_{nk}) = G(t).$$

Indem wir die k -te Wurzel ziehen, erhalten wir

$$(2.2.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_{nk} t + b_{nk}) = G^{1/k}(t).$$

Wir wenden nun den Satz von Chintschin (Satz 2.1.2) auf (2.2.1) und (2.2.2) an. Es folgt, dass G und $G^{1/k}$ vom gleichen Typ sind, d.h. es gibt $c_k > 0$ und $d_k \in \mathbb{R}$ mit

$$G^{1/k}(t) = G(c_k t + d_k) \quad \text{bzw.} \quad G(t) = G^k(c_k t + d_k).$$

Das bedeutet aber, dass G max-stabil ist. \square

Bemerkung 2.2.4. Schritt 1 des vorstehenden Beweises zeigt auch, dass jede Extremwertverteilung in ihrem eigenen Max-Anziehungsbereich liegt.

Von nun an besteht unser Ziel darin, die max-stabilen Verteilungen zu beschreiben. Die nächste Proposition zeigt, dass die Eigenschaft $G^n(c_n t + d_n) = G(t)$ auf nicht-ganzzahlige Werte von n erweitert werden kann.

Proposition 2.2.5. Sei G eine max-stabile Verteilungsfunktion. Dann gibt es messbare Funktionen $c : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ und $d : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $s > 0$ (nicht notwendigerweise ganzzahlig) gilt:

$$(2.2.3) \quad G^s(c(s)t + d(s)) = G(t).$$

BEWEIS. Wir bezeichnen mit $[t]$ die Gaußklammer einer reellen Zahl t :

$$[t] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq t\}.$$

Sei G eine max-stabile Verteilungsfunktion. Dann gibt es $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(2.2.4) \quad G^n(c_n t + d_n) = G(t).$$

Für beliebiges $s > 0$ folgt daraus, dass

$$G^{[ns]}(c_{[ns]}t + d_{[ns]}) = G(t).$$

Daraus ergibt sich, dass für alle $t \in \mathbb{R}$

$$(2.2.5) \quad G^n(c_{[ns]}t + d_{[ns]}) = (G^{[ns]}(c_{[ns]}t + d_{[ns]}))^{n/[ns]} = G^{n/[ns]}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G^{1/s}(t).$$

Gleichzeitig gilt aber wegen (2.2.4) auch

$$(2.2.6) \quad G^n(c_n t + d_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(t).$$

Mit dem Satz von Chintschin (Satz 2.1.2) folgt aus (2.2.5) und (2.2.6), dass die folgenden Grenzwerte existieren:

$$(2.2.7) \quad c(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{[ns]}}{c_n} \in (0, \infty), \quad d(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{[ns]} - d_n}{c_n} \in \mathbb{R},$$

und dass $G^{1/s}(t) = G(c(s)t + d(s))$. Insgesamt folgt also $G(t) = G^s(c(s)t + d(s))$.

Außerdem folgt aus der Darstellung (2.2.7), dass die Funktionen c und d als punktweise Grenzwerte von Folgen messbarer Funktionen, selber messbar sind. \square

2.3. Charakterisierung der max-stabilen Verteilungen

Wegen Satz 2.2.3 können wir den Satz von Fisher–Tippett–Gnedenko nun wie folgt formulieren:

Satz 2.3.1. Jede max-stabile Verteilungsfunktion G ist vom gleichen Typ wie eine der folgenden Verteilungen: Gumbel Λ , Fréchet Φ_α mit $\alpha > 0$ oder Weibull Ψ_α mit $\alpha > 0$.

Bevor wir zum Beweis des Satzes kommen, müssen wir ein tiefliegendes analytisches Lemma bereitlegen.

Lemma 2.3.2 (Satz von Ostrowski, 1929). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dann hat f die Form $f(x) = cx$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Korollar 2.3.3. Sei $g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ eine messbare Funktion mit

$$g(x \cdot y) = g(x) \cdot g(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dann hat g die Form $g(x) = x^c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die Funktion $f(x) = \log g(e^x)$ ist messbar mit $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Nach dem Satz von Ostrowski hat sie die Form $f(x) = cx$, woraus sich $g(x) = e^{f(\log x)} = x^c$ ergibt.

BEWEIS. Sei G eine max-stabile Verteilungsfunktion. Laut Proposition 2.2.5 gibt es messbare Funktionen $c(s) > 0$, $d(s) \in \mathbb{R}$ mit

$$(2.3.1) \quad G^s(c(s)t + d(s)) = G(t) \text{ für alle } s > 0, t \in \mathbb{R}.$$

Im Folgenden werden wir diese Funktionalgleichung lösen. Zuerst werden wir die Funktionen c und d bestimmen.

SCHRITT 1. Wir wenden (2.3.1) iterativ an und erhalten für $s_1, s_2 > 0$

$$G^{s_1 s_2}(c(s_1 s_2)t + d(s_1 s_2)) = G(t) = G^{s_1}(c(s_1)t + d(s_1)) = G^{s_1 s_2}(c(s_2)[c(s_1)t + d(s_1)] + d(s_2))$$

Aus Lemma 2.1.3 folgt

$$\begin{cases} c(s_1 s_2) = c(s_1)c(s_2), \\ d(s_1 s_2) = c(s_2)d(s_1) + d(s_2). \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung folgt mit Korollar 2.3.3, dass es ein $\rho \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$c(s) = s^\rho, \quad s > 0.$$

SCHRITT 2. Falls $\rho = 0$, also $c(s) = 1$, dann ist $G \rtimes \Lambda$ (Übung).

SCHRITT 3. Nun betrachten wir den Fall $\rho \neq 0$. Es gilt $c(s) = s^\rho$ und die Gleichung für d nimmt die folgende Form an: Für alle $s_1, s_2 > 0$ gilt

$$d(s_1 s_2) = s_2^\rho d(s_1) + d(s_2).$$

Indem wir s_1 und s_2 vertauschen, erhalten wir

$$d(s_2 s_1) = s_1^\rho d(s_2) + d(s_1).$$

Somit ergibt sich für alle $s_1, s_2 > 0$

$$s_2^\rho d(s_1) + d(s_2) = s_1^\rho d(s_2) + d(s_1).$$

Sei nun $s_2 = 2$. Aus $\rho \neq 0$ folgt, dass $2^\rho - 1 \neq 0$ und wir erhalten, dass für alle $s_1 > 0$

$$d(s_1) = \frac{d(2)}{2^\rho - 1} (s_1^\rho - 1) = (s_1^\rho - 1)\mu,$$

wobei $\mu = \frac{d(2)}{2^\rho - 1} \in \mathbb{R}$. Wir haben die Funktionen c und d bestimmt:

$$c(s) = s^\rho, \quad d(s) = (s^\rho - 1)\mu,$$

wobei $\rho \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}$ zwei Parameter sind.

Die Gleichung (2.3.1) für die Verteilungsfunktion G nimmt somit die folgende Gestalt an:

Für alle $s > 0, t \in \mathbb{R}$,

$$G^s(s^\rho t + (s^\rho - 1)\mu) = G(t).$$

Betrachte die Verteilungsfunktion $H(u) = G(u - \mu)$, $u \in \mathbb{R}$. Die Gleichung für H sieht wie folgt aus: Für alle $s > 0, t \in \mathbb{R}$,

$$H^s(s^\rho t) = H(t).$$

Mit $t = 0$ erhalten wir $H^s(0) = H(0)$ für alle $s > 0$, somit ist $H(0) = 0$ oder $H(0) = 1$.

FALL 1. Sei $H(0) = 0$. Da H eine Verteilungsfunktion ist, gilt $H(y) = 0$ für alle $y \leq 0$. Sei nun $y > 0$. Mit $t = 1$ und $s = y^{1/\rho} > 0$ erhalten wir

$$H(y) = H^{1/s}(1) = H^{y^{-1/\rho}}(1) = \exp\{(\log H(1)) \cdot y^{-1/\rho}\}, \quad y > 0.$$

Es sei bemerkt, dass $\log H(1) < 0$. Es folgt, dass H und somit auch G vom gleichen Typ wie die Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/\rho}$ ist.

FALL 2. Sei $H(0) = 1$. Da H eine Verteilungsfunktion ist, gilt $H(y) = 1$ für alle $y \geq 0$. Sei nun $y < 0$. Mit $t = -1$ und $s = (-y)^{1/\rho} > 0$ erhalten wir

$$H(y) = H^{1/s}(-1) = H^{(-y)^{-1/\rho}}(-1) = \exp\{(\log H(-1)) \cdot (-y)^{-1/\rho}\}, \quad y < 0.$$

Es sei bemerkt, dass $\log H(-1) < 0$. Es folgt, dass H und somit auch G vom gleichen Typ wie die Weibull-Verteilung $\Psi_{-1/\rho}$ ist.

□

KAPITEL 3

Regulär variierende Funktionen

Unser nächstes Ziel ist es, die Max-Anziehungsbereiche der Extremwertverteilungen zu beschreiben. Dies wird im nächsten Kapitel geschehen. Ob eine Verteilungsfunktion F in einem Max-Anziehungsbereich liegt, wird von dem Verhalten von F nahe dem rechten Randpunkt x^* abhängen. Um diese Bedingung an F zu formulieren, brauchen wir den Begriff der regulären Variation, den wir in diesem Kapitel einführen. Wir werden hier nur auf einige Aspekte der regulären Variation eingehen, für eine umfassende Darstellung dieses Gebiets verweisen wir auf das Buch von N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels “*Regular Variation*”.

Definition 3.0.1 (Karamata, 1930). Eine Funktion $L : (A, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ heißt **langsam variierend** in $+\infty$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1 \text{ für jedes } \lambda > 0.$$

Beispiel 3.0.2. Eine Funktion L , für die der Grenzwert $c := \lim_{x \rightarrow +\infty} L(x)$ in $(0, \infty)$ existiert, ist langsam variierend, denn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \frac{c}{c} = 1.$$

Ist aber der Grenzwert c gleich $+\infty$ oder 0 , so muss die Funktion nicht langsam variierend sein. Zum Beispiel sind die Funktionen $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = 1/x$ nicht langsam variierend.

Beispiel 3.0.3. Die Funktion $L(x) = c(\log x)^\beta$, mit $c > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, ist langsam variierend, denn für jedes $\lambda > 0$ gilt

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \frac{c(\log(\lambda x))^\beta}{c(\log x)^\beta} = \left(\frac{\log x + \log \lambda}{\log x} \right)^\beta \rightarrow 1$$

für $x \rightarrow +\infty$.

Beispiel 3.0.4. Für $\alpha \neq 0$ ist die Funktion $f(x) = x^\alpha$ nicht langsam variierend.

Aufgabe 3.0.5. Seien L_1 und L_2 langsam variierende Funktionen. Zeigen Sie, dass $L_1 L_2$ und $L_1 + L_2$ ebenfalls langsam variierend sind.

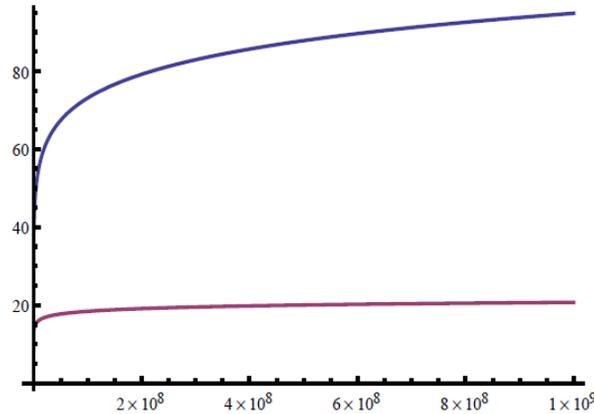


ABBILDUNG 1. Zwei langsam variierende Funktionen: $\exp\{\sqrt[3]{\log x}\}$ (blau) und $\log x$ (rot).

Definition 3.0.6 (Karamata, 1930). Eine messbare Funktion $R : (A, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ heißt **regulär variierend** in $+\infty$ mit Index $\alpha \in \mathbb{R}$, falls

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(\lambda x)}{R(x)} = \lambda^\alpha \text{ für jedes } \lambda > 0.$$

Bezeichnung: $f \in \text{RV}_\alpha$.

Bemerkung 3.0.7. Eine Funktion ist langsam variierend genau dann, wenn sie regulär variierend mit Index $\alpha = 0$ ist.

Beispiel 3.0.8. Die Funktion $R(x) = cx^\alpha$, wobei $c > 0$, ist regulär variierend mit Index α , denn

$$\frac{R(\lambda x)}{R(x)} = \frac{c(\lambda x)^\alpha}{cx^\alpha} = \lambda^\alpha \text{ für alle } \lambda > 0.$$

Beispiel 3.0.9. Die Funktion $f(x) = e^{[\log x]}$ (wobei $[\cdot]$ die Gauß-Klammer ist) ist nicht regulär variierend (Übung), obwohl die sehr ähnliche Funktion $R(x) = e^{\log x} = x$ regulär variierend mit Index $\alpha = 1$ ist.

Aufgabe 3.0.10. Seien $f \in \text{RV}_\alpha$ und $g \in \text{RV}_\beta$. Zeigen Sie, dass $fg \in \text{RV}_{\alpha+\beta}$.

Beispiel 3.0.11. Für eine langsam variierende Funktion $L : (A, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $R(x) = x^\alpha L(x)$ regulär variierend mit Index α , denn

$$\frac{R(\lambda x)}{R(x)} = \frac{(\lambda x)^\alpha}{x^\alpha} \cdot \frac{L(\lambda x)}{L(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \lambda^\alpha \text{ für alle } \lambda > 0.$$

Der folgende Satz zeigt, dass Beispiel 3.0.11 bereits alle regulär variierenden Funktionen umfasst.

Satz 3.0.12. Sei R eine regulär variierende Funktion mit Index α . Dann gibt es eine langsam variierende Funktion L , sodass

$$R(x) = x^\alpha L(x).$$

BEWEIS. Setze $L(x) = \frac{R(x)}{x^\alpha}$. Dann ist nur zu zeigen, dass $L(x)$ langsam variierend ist:

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \frac{R(\lambda x)/(\lambda x)^\alpha}{R(x)/x^\alpha} = \lambda^{-\alpha} \frac{R(\lambda x)}{R(x)} \rightarrow \lambda^{-\alpha} \cdot \lambda^\alpha = 1, \quad x \rightarrow +\infty,$$

da R nach Voraussetzung regulär variierend ist. Deshalb ist L langsam variierend. \square

Wir beschließen dieses Kapitel mit einem etwas tiefer liegenden Resultat.

Satz 3.0.13 (Potter, 1942). Sei L langsam variierend. Für alle $C > 1$, $\delta > 0$ gibt es ein $K = K(C, \delta)$ mit

$$\frac{L(y)}{L(x)} \leq C \max \left\{ \left(\frac{x}{y} \right)^\delta, \left(\frac{y}{x} \right)^\delta \right\}, \quad \text{für alle } x, y > K.$$

Ohne Beweis.

Max–Anziehungsbereiche

Wir wissen aus dem Satz von Fisher–Tippett–Gnedenko, dass die Verteilungen von Gumbel-Typ, vom Fréchet-Typ und vom Weibull-Typ die einzigen Verteilungen mit nicht-leerem Max-Anziehungsbereich sind. In diesem Kapitel wollen wir die Max-Anziehungsbereiche nun exakt beschreiben.

Für mehr Einzelheiten verweisen wir auf die Bücher von S. Resnick *“Extreme Values, Regular Variation and Point Processes”*, L. de Haan, A. Ferreira *“Extreme Value Theory: An Introduction”*, N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels *“Regular Variation”*.

4.1. Tailfunktion und Quantilfunktion

Zwei Funktionen, die zu der Beschreibung der Max-Anziehungsbereiche hilfreich sind, sind die Tailfunktion und die Quantilfunktion einer Verteilung F .

Definition 4.1.1. Die **Tailfunktion** einer Verteilungsfunktion F ist die Funktion

$$\bar{F}(t) := 1 - F(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Definition 4.1.2. Die **Quantilfunktion** (oder die **linksstetige Inverse**) einer Verteilungsfunktion F ist die Funktion

$$F^{\leftarrow}(a) := \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq a\}, \quad a \in (0, 1).$$

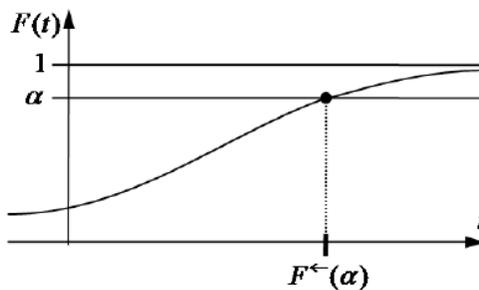


ABBILDUNG 1. Veranschaulichung von $F^{\leftarrow}(a)$.

Ist die Funktion F streng monoton steigend und stetig, so ist F^{\leftarrow} die inverse Funktion von F . Im Allgemeinen können aber zwei Arten von Problemen auftreten:

- (1) Die Funktion F kann auf einem Intervall konstant bleiben.
- (2) Die Funktion F kann Sprünge haben.

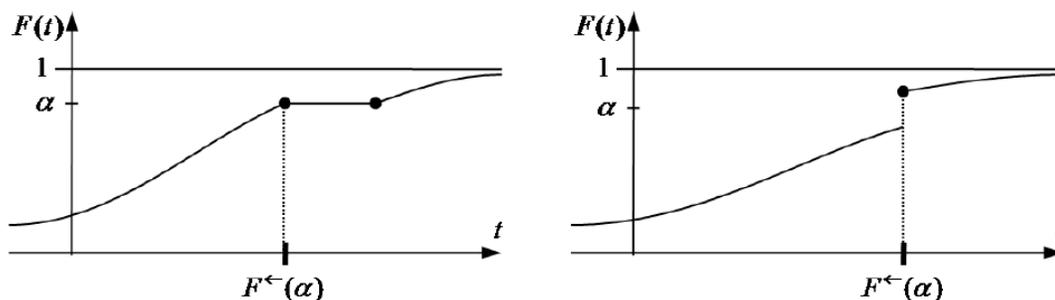


ABBILDUNG 2. Problemfälle

In beiden Fällen ist die inverse Funktion zu F nicht wohldefiniert. Die Quantilfunktion existiert aber trotzdem.

Aufgabe 4.1.3. Sei F eine Verteilungsfunktion. Zeigen Sie, dass F^{\leftarrow} linksstetig und monoton nicht-fallend ist.

Abbildung 2, rechts, zeigt, dass $F(F^{\leftarrow}(y))$ nicht immer gleich y sein muss und Abbildung 2, links, zeigt, dass $F^{\leftarrow}(F(x))$ nicht immer gleich x sein muss. Es gilt jeweils nur eine einseitige Abschätzung:

Lemma 4.1.4. Sei F eine Verteilungsfunktion.

- (i) Es gilt $F^{\leftarrow}(F(x)) \leq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $F(x) \in (0, 1)$.
- (ii) Es gilt $F(F^{\leftarrow}(y)) \geq y$ für alle $y \in (0, 1)$.

BEWEIS. (i) Es ist $x \in \{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq F(x)\}$ und somit $x \geq \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq F(x)\} = F^{\leftarrow}(F(x))$.

(ii) Sei $x = F^{\leftarrow}(y)$. Nach Definition von F^{\leftarrow} gibt es nun eine monoton fallende, gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $F(x_n) \geq y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil F als Verteilungsfunktion rechtsstetig ist, ergibt sich, dass $F(x) \geq y$. \square

4.2. Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung Φ_α

Der nächste Satz beschreibt den Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung Φ_α , $\alpha > 0$.

Satz 4.2.1 (Gnedenko, 1943). Eine Verteilungsfunktion F mit rechtem Endpunkt x^* liegt genau dann im Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung Φ_α mit Parameter $\alpha > 0$, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $x^* = +\infty$.

(2) Die Tailfunktion \bar{F} ist regulär variierend mit Index $-\alpha$, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(\lambda x)}{1 - F(x)} = \lambda^{-\alpha} \text{ für alle } \lambda > 0.$$

Beispiel 4.2.2. Die Pareto-Verteilung (mit Tailfunktion $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}$, $x > 1$) liegt im Max-Anziehungsbereich von Φ_α , denn $x^* = +\infty$ und $\bar{F} \in \text{RV}_{-\alpha}$. Allgemeiner liegt eine beliebige Verteilungsfunktion, für die $\bar{F}(x) \sim Kx^{-\alpha}$ für $x \rightarrow +\infty$ gilt (wobei $K > 0$ und $\alpha > 0$), im Max-Anziehungsbereich von Φ_α .

Wir beweisen zuerst die Rückrichtung von Satz 4.2.1. Dies geschieht im folgenden Satz.

Satz 4.2.3. Es seien X_1, X_2, \dots unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F , für die $x^* = +\infty$ und $\bar{F} \in \text{RV}_{-\alpha}$ gilt. Weiterhin sei a_n eine beliebige Folge mit

$$(4.2.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(a_n) = 1.$$

Dann gilt

$$\frac{M_n}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \Phi_\alpha.$$

BEWEIS. Gegeben ist, dass $x^* = +\infty$ und $\bar{F} \in \text{RV}_{-\alpha}$. Wir zeigen, dass für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n t) = \Phi_\alpha(t).$$

SCHRITT 1. Zuerst zeigen wir durch Widerspruch, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Hätte a_n eine nach oben beschränkte Teilfolge, so wäre entlang dieser Teilfolge $\bar{F}(a_n)$ wegbeschränkt von 0 (wegen $x^* = +\infty$) und wir hätten dann $\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(a_n) = +\infty$. Widerspruch zu (4.2.1). Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

SCHRITT 2. Sei $t > 0$. Da \bar{F} regulär variierend mit Index $-\alpha$ ist, ergibt sich unter Berücksichtigung von (4.2.1), dass

$$n\bar{F}(a_n t) = n\bar{F}(a_n) \cdot \frac{\bar{F}(a_n t)}{\bar{F}(a_n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \cdot t^{-\alpha} = t^{-\alpha}.$$

Dadurch folgt:

$$F^n(a_n t) = (1 - \bar{F}(a_n t))^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-t^{-\alpha}} = \Phi_\alpha(t).$$

SCHRITT 3. Sei $t \leq 0$. Es gilt für hinreichend großes n , dass $a_n > 0$ (Schritt 1) und folglich

$$F^n(a_n t) \leq F^n(0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 = \Phi_\alpha(t),$$

wobei wir benutzt haben, dass $F(0) < 1$ wegen $x^* = +\infty$. □

Nun geben wir eine Normierungsfolge a_n an, die der Bedingung aus Satz 4.2.3 genügt:

$$a_n := F^{\leftarrow} \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Lemma 4.2.4. Sei $x^* = +\infty$ und $\bar{F} \in \text{RV}_{-\alpha}$. Mit der obigen Wahl von a_n gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(a_n) = 1.$$

BEWEIS. Ist F streng monoton steigend und stetig, so gilt $F(a_n) = 1 - \frac{1}{n}$, denn F^{\leftarrow} ist dann die inverse Funktion von F . In diesem Fall ist die Aussage des Lemmas gültig, denn es ist sogar $n\bar{F}(a_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Im Fall eines beliebigen F müssen wir anders argumentieren.

SCHRITT 1. Aus Lemma 4.1.4 folgt, dass $\bar{F}(a_n) \leq \frac{1}{n}$, woraus sich direkt ergibt, dass

$$(4.2.2) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(a_n) \leq 1.$$

SCHRITT 2. Es bleibt also noch zu zeigen, dass

$$(4.2.3) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(a_n) \geq 1.$$

Sei dazu $x \in (0, 1)$. Für n groß genug gilt $xa_n > 0$, denn $a_n \rightarrow \infty$. Es gilt außerdem $F(xa_n) < 1 - \frac{1}{n}$ nach Definition von a_n . Somit gilt:

$$n\bar{F}(xa_n) = n(1 - F(xa_n)) > n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Damit folgt unmittelbar:

$$n\bar{F}(a_n) = n\bar{F}(xa_n) \cdot \frac{\bar{F}(a_n)}{\bar{F}(xa_n)} > \frac{\bar{F}(a_n)}{\bar{F}(xa_n)} \rightarrow x^\alpha, \quad n \rightarrow \infty,$$

da \bar{F} regulär variierend mit Index $-\alpha$ ist. Es ergibt sich also, dass $\liminf_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(a_n) \geq x^\alpha$ für alle $x \in (0, 1)$. Wenn man nun x gegen 1 gehen lässt, ergibt sich (4.2.3). Damit ist insgesamt $\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(a_n) = 1$ und das Lemma ist bewiesen. \square

Nun beweisen wir die Hinrichtung von Satz 4.2.1.

BEWEIS VON SATZ 4.2.1: “ \Rightarrow ”. Es sei F eine Verteilungsfunktion und $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ Folgen, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$(4.2.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n t + b_n) = \Phi_\alpha(t).$$

Wir zeigen, dass $x^* = +\infty$ und $\bar{F} \in \text{RV}_{-\alpha}$.

SCHRITT 1. Zuerst müssen wir (4.2.4) auf nichtganzzahlige Werte von n erweitern. Für ein nicht notwendigerweise ganzzahliges $s \geq 0$ definiere $a_s = a_{\lfloor s \rfloor}$ und $b_s = b_{\lfloor s \rfloor}$.

Nun gilt

$$(4.2.5) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a_{\lambda s}}{a_s} = \lambda^{1/\alpha}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_{\lambda s} - b_s}{a_s} = 0$$

(Übung). Somit ist die Funktion $s \mapsto a_s$ regulär variierend mit Index $1/\alpha$.

SCHRITT 2. Wir werden nun (4.2.5) benutzen, um zu zeigen, dass

$$(4.2.6) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_s}{a_s} = 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Es gibt eine Konstante A so, dass

$$(4.2.7) \quad \frac{a_{x/\lambda}}{a_x} < 2\lambda^{-1/(2\alpha)} \text{ für alle } x \geq A, \quad \lambda > 1$$

(das folgt aus der Potter-Schranke für die regulär variierende Funktion $x \mapsto a_x$) und

$$(4.2.8) \quad \left| \frac{b_{2x} - b_x}{a_x} \right| < \varepsilon \text{ für alle } x \geq A$$

(das folgt aus der zweiten Relation in (4.2.5)). Für ein $s > A$ können wir ein $n = n(s) \in \mathbb{N}_0$ finden mit $s/2^{n+1} \leq A < s/2^n$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\left| \frac{b_s}{a_s} \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{b_{s/2^{k-1}} - b_{s/2^k}}{a_{s/2^k}} \right| \frac{a_{s/2^k}}{a_s} + \frac{b_{s/2^n}}{a_s} \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n 2 \cdot 2^{-k/(2\alpha)} + \frac{C_1}{a_s},$$

wobei wir im zweiten Schritt (4.2.7) und (4.2.8) benutzt haben, sowie die Tatsache, dass $s/2^n \in [A, 2A]$ und somit $|b_{s/2^n}| < C_1$ für eine Konstante C_1 . Da $a_s \rightarrow \infty$ für $s \rightarrow \infty$ (denn a_s ist regulär variierend mit positivem Index), ergibt sich

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{b_s}{a_s} \right| \leq 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\alpha k/2}.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig und die Summe auf der rechten Seite endlich ist, erhalten wir (4.2.6).

Wegen (4.2.6) und des Satzes von Chintschin können wir nun (4.2.4) wie folgt vereinfachen: Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$(4.2.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n t) = \Phi_\alpha(t).$$

SCHRITT 3. Wir zeigen, dass $x^* = +\infty$. Wäre x^* endlich, so wäre $a_n > x^*$ für n groß genug und wir hätten $F^n(a_n) = 1$ für n groß genug, was in einem Widerspruch zu (4.2.9) steht. Also ist $x^* = +\infty$.

SCHRITT 4. Durch Logarithmieren ergibt sich aus (4.2.9), dass für alle $t > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log F(a_n t) = -t^{-\alpha}.$$

Dies kann man auch wie folgt umschreiben: Für alle $t > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log(1 - \bar{F}(a_n t)) = -t^{-\alpha}.$$

Da $a_n \rightarrow \infty$ (wegen der regulären Variation) und somit $\bar{F}(a_n t) \rightarrow 0$, können wir die Formel $\lim_{x \rightarrow 0} \log(1-x)/x = -1$ verwenden. Es ergibt sich, dass für alle $t > 0$

$$(4.2.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \bar{F}(a_n t) = t^{-\alpha}.$$

SCHRITT 5. Schließlich zeigen wir unter Benutzung von (4.2.10), dass \bar{F} regulär variierend mit Index $-\alpha$ ist. Sei dazu $\lambda > 0$. Für $x > 0$ definiere

$$n(x) := \inf\{m \in \mathbb{N}: a_{m+1} > x\}.$$

Wegen $a_n \rightarrow +\infty$ ist $n(x)$ wohldefiniert. Es gilt $a_{n(x)} \leq x < a_{n(x)+1}$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} n(x) = \infty$. Da \bar{F} außerdem monoton nichtsteigend ist, folgt daraus die Abschätzung

$$\frac{\bar{F}(\lambda x)}{\bar{F}(x)} \leq \frac{\bar{F}(\lambda a_{n(x)})}{\bar{F}(a_{n(x)+1})} = \frac{\bar{F}(\lambda a_{n(x)})n(x)}{\bar{F}(a_{n(x)+1})(n(x)+1)} \cdot \frac{n(x)+1}{n(x)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{-\alpha}}{1} \cdot 1 = \lambda^{-\alpha},$$

wobei wir im letzten Schritt (4.2.10) zweimal benutzt haben. Daraus ergibt sich

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(\lambda x)}{\bar{F}(x)} \leq \lambda^{-\alpha}.$$

Der Beweis der unteren Abschätzung ist analog. □

Lemma 4.2.5. Sei $f \in RV_{\alpha}, \alpha > 0$. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

BEWEIS. Es ist $f(x) = x^{\alpha}L(x)$ für eine langsam variierende Funktion L . Aus der Potter-Schranke folgt

$$L(x) \geq L(x_0) \cdot \frac{1}{2} \cdot x_0^{\alpha/2} x^{-\alpha/2}, \quad x > x_0,$$

für ein geeignetes x_0 . Also $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. □

4.3. Max–Anziehungsbereich der Weibull–Verteilung Ψ_{α}

Der Max–Anziehungsbereich der Weibull–Verteilung Ψ_{α} hat eine ähnliche Charakterisierung wie der Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung. Der Unterschied ist, dass im Fall der Weibull–Verteilung der rechte Endpunkt x^* endlich sein muss. Damit eine Verteilungsfunktion F im Max–Anziehungsbereich von Ψ_{α} liegt, muss \bar{F} an der Stelle x^* regulär variierend sein. Wir geben nun eine präzise Definition.

Definition 4.3.1. Eine messbare Funktion $f : (0, A) \rightarrow (0, \infty)$ heißt **regulär variierend in 0** mit Index $\alpha \in \mathbb{R}$, falls

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^{\alpha} \text{ für alle } \lambda > 0.$$

Bezeichnung: $f \in RV_{\alpha}(0)$.

Aufgabe 4.3.2. Zeigen Sie: $f(x)$ ist regulär variierend mit Index α an der Stelle 0 genau dann, wenn $f(1/x)$ regulär variierend mit Index $-\alpha$ (an der Stelle $+\infty$) ist.

Der nächste Satz charakterisiert den Max–Anziehungsbereich der Weibull–Verteilung.

Satz 4.3.3 (Gnedenko, 1943). Eine Verteilungsfunktion F mit rechtem Endpunkt x^* liegt im Max–Anziehungsbereich der Weibull–Verteilung Ψ_α mit Parameter $\alpha > 0$ genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $x^* < \infty$.
- (2) Die Funktion $x \mapsto \bar{F}(x^* - x)$, $x > 0$, ist regulär variierend in 0 mit Index α , d.h.

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1 - F(x^* - \lambda x)}{1 - F(x^* - x)} = \lambda^\alpha \text{ für alle } \lambda > 0.$$

Bemerkung 4.3.4. Sind die beiden Bedingungen von Theorem 4.3.3 erfüllt, so gilt genauer, dass

$$\frac{M_n - x^*}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \Psi_\alpha,$$

wobei a_n eine beliebige Folge mit

$$(4.3.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(x^* - a_n) = 1$$

ist. Der Nachweis der Existenz erfolgt ähnlich wie im Fréchet-Fall; die Details werden übergangen.

Beispiel 4.3.5. Betrachte die Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - (x^* - x)^\alpha$ mit $x \in (x^* - 1, x^*)$, wobei $\alpha > 0$. Dann ist $1 - F(x^* - x) = x^\alpha \in \text{RV}_\alpha(0)$. Somit liegt F im $\text{MDA}(\Psi_\alpha)$.

Allgemeiner liegt eine Verteilungsfunktion F mit endlichem rechten Endpunkt x^* , für die $\bar{F}(x^* - x) \sim Kx^\alpha$ für $x \downarrow 0$ gilt (wobei $K > 0$, $\alpha > 0$), im Max–Anziehungsbereich von Ψ_α .

Wir beweisen nur die Rückrichtung von Satz 4.3.3. Der Beweis der Hinrichtung benutzt ähnliche Ideen wie im Fréchet-Fall.

BEWEIS VON SATZ 4.3.3: “ \Leftarrow ”. Sei $x < 0$. Es gilt

$$\mathbb{P} \left[\frac{M_n - x^*}{a_n} \leq x \right] = F^n(a_n x + x^*) = (1 - \bar{F}(a_n x + x^*))^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-(x)^\alpha} = \Psi_\alpha(x),$$

denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(a_n x + x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(x^* - a_n) \cdot \frac{\bar{F}(x^* - a_n(-x))}{\bar{F}(x^* - a_n)} = (-x)^\alpha.$$

Dabei haben wir die reguläre Variation von $\bar{F}(x^* - x)$ an der Stelle $x = 0$ und (4.3.1) benutzt.

Sei $x \geq 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P} \left[\frac{M_n - x^*}{a_n} \leq x \right] = 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 = \Psi_\alpha(x),$$

denn $M_n \leq x^*$ f.s.

□

4.4. Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung Λ

Für die Frage, ob eine Verteilung im Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung liegt, gibt es kein so einfach handhabbares Kriterium wie bei der Fréchet- und Weibull–Verteilung. Wir erwähnen aus der Vielzahl umständlicherer Kriterien eines und verweisen für andere Charakterisierungen auf die Bücher von L. de Haan “*On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes*”, N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels “*Regular Variation*” und S. Resnick “*Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*”.

Satz 4.4.1 (Gnedenko, 1943). Eine Verteilungsfunktion F mit rechtem Endpunkt x^* liegt genau dann im Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung Λ , wenn es eine positive und messbare Funktion $g(x)$ gibt mit

$$(4.4.1) \quad \lim_{x \uparrow x^*} \frac{\bar{F}(x + ug(x))}{\bar{F}(x)} = e^{-u} \text{ für alle } u \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 4.4.2. x^* kann im Gumbel–Fall endlich oder unendlich sein.

Bemerkung 4.4.3. Genauer gilt: Ist die Bedingung (4.4.1) erfüllt, so gilt

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \Lambda,$$

wobei a_n und b_n Folgen sind, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$(4.4.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(b_n) = 1, \quad a_n = g(b_n).$$

BEWEIS VON SATZ 4.4.1. Es wird hier wiederum nur ein Beweis für die Rückrichtung gegeben. Es seien also (4.4.1) und (4.4.2) erfüllt. Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x^*$, denn hätte b_n eine von x^* wegbeschränkte Teilfolge, so würde entlang dieser Teilfolge (4.4.2) verletzt sein. Man betrachte nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(a_n u + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(b_n + g(b_n)u)}{\bar{F}(b_n)} \cdot n\bar{F}(b_n) = e^{-u},$$

wobei wir (4.4.1) und (4.4.2) benutzt haben. Es folgt

$$\mathbb{P} \left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq u \right] = F^n(a_n u + b_n) = (1 - \bar{F}(a_n u + b_n))^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-e^{-u}}.$$

Und dadurch ergibt sich $\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \Lambda$. □

Beispiel 4.4.4. Die Exponentialverteilung $\text{Exp}(\lambda)$ mit Tailfunktion

$$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

liegt im Max–Anziehungsbereich von Λ . Man kann nachrechnen, dass Bedingung (4.4.1) mit $g(x) = \frac{1}{\lambda}$ erfüllt ist:

$$\frac{\bar{F}(x + ug(x))}{\bar{F}(x)} = e^{-\lambda ug(x)} = e^{-u}.$$

Aus (4.4.2) ergibt sich (als eine mögliche Wahl) $b_n = \frac{\log n}{\lambda}$ und $a_n = \frac{1}{\lambda}$, so dass

$$\lambda M_n - \log n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \Lambda.$$

Beispiel 4.4.5. Auch die Normalverteilung liegt im Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung

Statistik der Extremwertverteilungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit statistischen Anwendungen der Extremwertverteilungen. Wir werden zwei verschiedene Zugänge zur Modellierung von Extremwerten betrachten.

- Der erste Zugang basiert auf der Modellierung von *Blockmaxima* durch die bereits bekannten Extremwertverteilungen, die hier GEV-Verteilungen (Generalized Extreme-Value Distributions) genannt werden.
- Der zweite Zugang (*Peaks Over Threshold Method*) benutzt die verallgemeinerten Pareto-Verteilungen (GPD, Generalized Pareto Distributions).

Wir werden hier nur auf einige grundlegende Ideen der statistischen Modellierung von Extremwerten eingehen. Für mehr Einzelheiten verweisen wir auf die Bücher von S. Coles “*An introduction to statistical modeling of extreme values*”, E. Gumbel “*Statistics of extremes*”, J. Beirlant, Y. Goegebeur, J. Teugels, J. Segers “*Statistics of extremes*”.

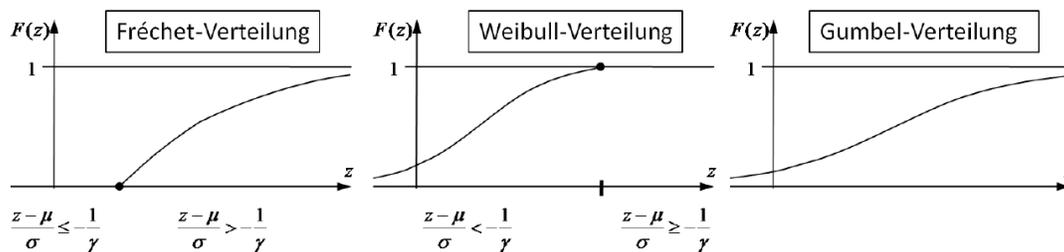
5.1. Statistik der Blockmaxima: GEV-Verteilungen

Wir haben in Abschnitt 1.5 gesehen, dass Extremwertverteilungen folgende Form haben:

$$G_{\gamma,\mu,\sigma}(z) = \exp \left\{ - \left(1 + \gamma \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \right\} \text{ für } 1 + \gamma \frac{z - \mu}{\sigma} > 0.$$

Extremwertverteilungen bilden also eine dreiparametrische Familie: $\gamma \in \mathbb{R}$ ist der formgebende Parameter, $\mu \in \mathbb{R}$ ist der Lageparameter und $\sigma > 0$ ist der Skalenparameter. Für γ gilt:

- $\gamma > 0$: G ist eine Fréchet-Verteilung (definiert für $\frac{z-\mu}{\sigma} > -\frac{1}{\gamma}$ wie oben, sonst 0).
- $\gamma < 0$: G ist eine Weibull-Verteilung (definiert für $\frac{z-\mu}{\sigma} < -\frac{1}{\gamma}$ wie oben, sonst 1).
- $\gamma = 0$: G ist eine Gumbel-Verteilung (definiert für $z \in \mathbb{R}$ wie oben).



Beispiel 5.1.1 (Wasserstände an einem Deich). Nach der Nordsee-Flut 1953 mit 1836 Toten allein in den Niederlanden wurde beschlossen die Deiche so hoch zu bauen, dass sie nur noch alle 10 000 Jahre überflutet wurden. Aber wie hoch mussten sie sein?

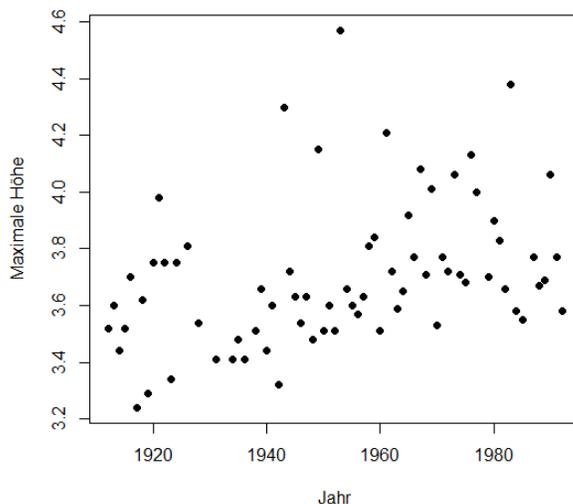


ABBILDUNG 1. Höhen des höchsten Wasserstände in Dover

Wir nutzen an Stelle dieser Daten die Wasserstands-Daten von Dover aus den Jahren 1912 bis 1992, weil diese einfacher verfügbar sind (z.B. als Teil des Datensatzes `sealevel` des R-Pakets `evd`). Diese sind in Abbildung 1 zu sehen. Wir wollen aus diesen Daten die Deichhöhe Z_p bestimmen, bei der eine Überflutung mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit p in einem Jahr stattfindet. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit p sehr klein (viel kleiner als $1/n$, zum Beispiel), so dass alle gemessenen Wasserstände sicherlich kleiner als die gesuchte Höhe Z_p sind.

Um die Deichhöhe zu bestimmen, betrachten wir folgendes Modell: x_1, \dots, x_n sind Realisierungen von X_1, \dots, X_n , die u.i.v. Zufallsvariablen mit einer GEV-Verteilung $G_{\gamma, \mu, \sigma}$ mit Parametervektor $\theta = (\gamma, \mu, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ sind.

Bemerkung 5.1.2. Den jährlichen Maxima eine GEV-Verteilung zu unterstellen, ist eine natürliche Wahl, da jedes X_i ein Maximum von vielen Zufallsvariablen ist, die zumindest annähernd u.i.v. sind. Wir haben in früheren Kapiteln gezeigt, dass solche Maxima unter sehr allgemeinen Bedingungen gegen Extremwertverteilungen konvergieren. Natürlich braucht man für die Konvergenz Normierungskonstanten, für Zwecke des Statistik kann man aber annehmen, dass die Normierungskonstanten bereits in den Parametern μ und σ enthalten sind. (Wenn $M - \log n$ einer GEV-Verteilung mit Parameter $\gamma = 0$, $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ folgt, dann hat M eine GEV-Verteilung mit $\gamma = 0$, $\mu = \log n$ und $\sigma = 1$.)

Unser Problem besteht nun darin, den Parametervektor θ zu schätzen. Wir werden die *Maximum-Likelihood-Methode* (ML-Methode) benutzen. Dazu benötigt man die Dichte $f_{\gamma, \mu, \sigma}(z)$ der GEV-Verteilung. Durch Ableiten der Verteilungsfunktion $G_{\gamma, \mu, \sigma}$ erhält man, dass für $\gamma \neq 0$

$$f_{\theta}(z) = f_{\gamma, \mu, \sigma}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} (1 + \gamma \frac{z - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\gamma} - 1} \exp\{- (1 + \gamma \frac{z - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\gamma}}\}, & 1 + \gamma \frac{z - \mu}{\sigma} > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

während für $\gamma = 0$

$$f_{\theta}(z) = f_{0,\mu,\sigma} = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{z-\mu}{\sigma}} \exp \left\{ -e^{-\frac{z-\mu}{\sigma}} \right\}, \text{ für } z \in \mathbb{R}.$$

Mit Hilfe der Dichten kann man die Log-Likelihoodfunktion aufstellen:

$$l(\theta) := l(\theta|x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n \log f_{\theta}(x_i).$$

Für $\gamma \neq 0$ gilt:

$$l(\theta) = -n \log \sigma - \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \gamma \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^n \left(1 + \gamma \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\gamma}},$$

falls $1 + \gamma \frac{x_i - \mu}{\sigma} > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, und $l(\theta) = -\infty$ sonst. Für $\gamma = 0$ gilt:

$$l(\theta) = -n \log \sigma - \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma} - \sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_i - \mu}{\sigma}}.$$

Bei der Bestimmung des Maximum-Likelihood-Schätzers ergeben sich zwei Probleme: Für $\gamma < -1$ und $(\max\{x_1, \dots, x_n\} - \mu)/\sigma \rightarrow -1/\gamma$ gilt $l(\theta) \rightarrow \infty$. Deshalb bezeichnen wir bereits ein lokales Maximum der Log-Likelihoodfunktion $l(\gamma, \mu, \sigma)$ als *Maximum-Likelihood-Schätzer* für $\hat{\theta} = (\hat{\gamma}, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$. Aber auch diese lokalen Maxima können nicht analytisch bestimmt werden, sondern müssen numerisch ermittelt werden.

Nachdem der Parameter θ geschätzt wurde, können wir die Deichhöhe Z_p schätzen. Wir erinnern, dass Z_p die Deichhöhe ist, bei der eine Überflutung mit Wahrscheinlichkeit p in einem Jahr stattfindet. Das Problem besteht also darin, dass $(1-p)$ -Quantil des jährlichen Maximums zu schätzen. Wir schätzen Z_p indem wir die Gleichung

$$G_{\hat{\gamma}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}}(\hat{Z}_p) = 1 - p$$

lösen (falls $p \in (0, 1)$, dann ist die Lösung eindeutig bestimmt):

$$\hat{Z}_p = \begin{cases} \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\gamma}} \{1 - (-\log(1-p))^{-\hat{\gamma}}\}, & \hat{\gamma} \neq 0, \\ \hat{\mu} - \hat{\sigma} \log(-\log(1-p)), & \hat{\gamma} = 0. \end{cases}$$

Für $\hat{\gamma} < 0$ (im Fall der Weibull-Verteilung) besitzt die Verteilung $G_{\hat{\gamma}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}}$ einen endlichen rechten Endpunkt, den wir als Z_0 bezeichnen. In diesem Fall gehen wir davon aus, dass es einen absolut höchsten Wasserstand gibt, der niemals überschritten wird. Der Schätzer für Z_0 ist dann gegeben durch:

$$\hat{Z}_0 = \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\gamma}}.$$

Beispiel 5.1.3 (Fortsetzung von Beispiel 5.1.1). Für die Daten von Dover ergibt sich $\hat{\gamma} = -0,021$, $\hat{\mu} = 3,6$ und $\hat{\sigma} = 0,20$. Wir befinden uns also im Bereich der Weibull-Verteilung. Es ergeben sich Höhen $Z_{0,001} = 4,9$ für einen Deich, der nur alle 10000 Jahre überflutet wird, und $Z_0 = 13,2$ für einen Deich, der nie überflutet wird.

5.2. Modell-Verifikation

Ein grundsätzliches Dilemma der Statistik ist folgendes: Die Theorie verlangt, dass man sich vor Ansehen der Daten auf Grund theoretischer Überlegungen sicher ist, dass das Modell richtig ist. Aber ein Modell ist nie richtig – daran, dass man sich a priori sicher ist, ist überhaupt nicht zu denken. Deshalb führt man in der Praxis Modell-Verifikationen durch, d.h. man überprüft ob das Modell die Daten adäquat beschreibt. Hierfür sind graphische Verfahren sehr beliebt.

Im Falle der Schätzer aus Abschnitt 5.1 ist also zu überprüfen, ob die Daten x_1, \dots, x_n gut durch Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n beschrieben werden, die unabhängig sind, die identisch verteilt sind und deren Verteilung eine Extremwertverteilung $G_{\gamma, \mu, \sigma}$ ist.

Ein geeignetes Instrument, um die dritte Annahme zu überprüfen, ist der QQ-Plot.

Das q -Quantil $G^{\leftarrow}(q)$, wobei $q \in (0, 1)$, einer Verteilungsfunktion G ist definiert als (die kleinste) Lösung z der Gleichung

$$G(z) = q.$$

Die Ordnungsstatistiken von $x = (x_1, \dots, x_n)$ sind eine neue Stichprobe $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$, die die gleichen Elemente (mit ggf. gleichen Vielfachheiten) wie die ursprüngliche Stichprobe enthält, aber aufsteigend sortiert ist: $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$.

Um zu überprüfen, ob eine Verteilung G eine Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ gut beschreibt, werden beim QQ-Plot auf der horizontalen Achse die $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots, \frac{n}{n+1}$ -Quantile der Verteilung G abgetragen und auf der vertikalen Achse die Ordnungsstatistiken $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$.

Definition 5.2.1 (Quantil-Plot). Der **QQ-Plot** ist die Menge

$$\left\{ \left(G^{\leftarrow} \left(\frac{i}{n+1} \right), x_{(i)} \right) : i = 1, \dots, n \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Wenn G die Daten gut beschreibt, sollte

$$G^{\leftarrow} \left(\frac{i}{n+1} \right) \approx x_{(i)}$$

gelten bzw. sollten die Punkte im QQ-Plot auf der Winkelhalbierenden liegen.

Bei der Modell-Verifikation dürfen die Ergebnisse der Schätzung verwendet werden, d.h. als Verteilung G nehmen wir im QQ-Plot die Verteilung mit den geschätzten Parametern. Ein QQ-Plot für Beispiel 5.1.1 findet sich in Abbildung 2.

Wenden wir uns nun noch einer weiteren zu überprüfenden Annahme zu, nämlich der, dass die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n identisch verteilt sind. Bei genauem Hinsehen stellt man fest, dass dies in Beispiel 5.1.1 nicht der Fall ist. Man sagt, die Daten seien nicht *stationär*.

Wir betrachten nun ein Modell, das dieser Nichtstationarität der Daten Rechnung trägt. Die beobachteten Blockmaxima x_1, \dots, x_n seien Realisierungen von Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n , die unabhängig aber nicht identisch verteilt seien mit

$$X_i \sim G_{\gamma^{(i)}, \sigma^{(i)}, \mu^{(i)}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

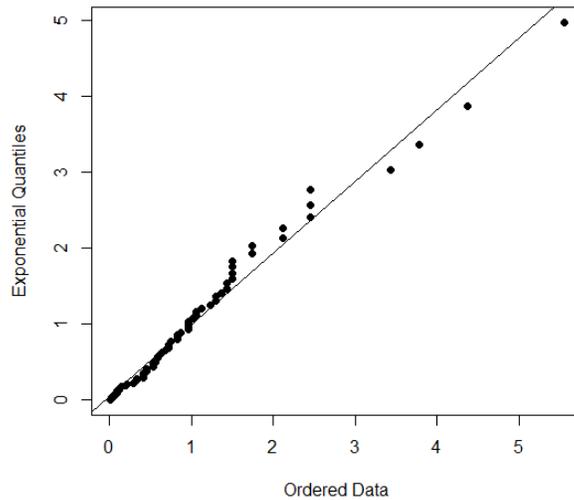


ABBILDUNG 2. QQ-Plot der Daten aus Beispiel 5.1.1

Dabei ist der Parametervektor $(\gamma(i), \sigma(i), \mu(i))$ eine Funktion der Zeit i . Für diese Funktion kann man z.B. den folgenden Ansatz verwenden:

$$\gamma(i) = \gamma, \quad \sigma(i) = \sigma, \quad \mu(i) = \beta_0 + \beta_1 \cdot i.$$

Wir gehen also von einem konstanten Formparameter γ , einem konstanten Skalenparameter σ und einem linearen Trend, der im Lageparameter μ berücksichtigt wird, aus. Die Parameter $(\gamma, \sigma, \beta_0, \beta_1)$ lassen sich wieder mit der ML-Methode schätzen und somit lässt sich das Problem mit den bereits im Fall von stationären Daten betrachteten Methoden lösen. Möchte man das Modell verifizieren, so kann man QQ-Plots erstellen. Davor muss man aber die Stichprobe x_1, \dots, x_n von dem Trend bereinigen:

$$x'_i := x_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 i.$$

Die bereinigte Stichprobe x'_1, \dots, x'_n sollte man dann mit der Verteilungsfunktion $G_{\hat{\gamma}, 0, \hat{\sigma}}$ vergleichen.

Bemerkung 5.2.2. Der Ansatz kann verallgemeinert werden, ohne dass sich das Modell grundsätzlich ändert. So ist es zum Beispiel problemlos möglich, einen exponentiellen Trend zu modellieren:

$$\gamma(i) = \gamma, \quad \sigma(i) = \sigma, \quad \mu(i) = e^{\beta_0 + \beta_1 i}.$$

5.3. Peaks over Threshold: Statistik der GP-Verteilungen

Die oben beschriebene Methode basiert auf der Betrachtung von Blockmaxima (z.B. von jährlichen Maxima). Es gibt eine andere Methode (Peaks over Threshold), bei der man

nur Beobachtungen berücksichtigt, die einen Schwellenwert überschreiten. Im Folgenden beschäftigen wir uns mit dieser Methode.

Es sei X eine Zufallsvariable, die man sich z.B. als eine Schadenhöhe vorstellen kann. Wir interessieren uns nur für die großen Werte von X und stellen die folgende Frage:

Wie ist der sogenannte **Exzess** $X - u$ asymptotisch verteilt, gegeben dass $X > u$? Dabei geht $u \rightarrow \infty$.

Wir betrachten zwei Beispiele.

Beispiel 5.3.1. Sei X exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h. $\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}$, $t > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[X - u > t | X > u] = \frac{\mathbb{P}[X > u + t, X > u]}{\mathbb{P}[X > u]} = \frac{\mathbb{P}[X > u + t]}{\mathbb{P}[X > u]} = \frac{e^{-\lambda(u+t)}}{e^{-\lambda u}} = e^{-\lambda t}.$$

Es gilt also: Die bedingte Verteilung von $X - u$ gegeben, dass $X > u$, ist die Exponentialverteilung mit Parameter λ . Dies ist die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung.

Beispiel 5.3.2. Sei X aus dem Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung Φ_α , $\alpha > 0$. D.h., $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$. Dann gilt für alle $t > 0$:

$$\mathbb{P}\left[\frac{X - u}{u} > t \mid X > u\right] = \frac{\mathbb{P}[X > u + ut]}{\mathbb{P}[X > u]} = \frac{\bar{F}(u(t+1))}{\bar{F}(u)} \rightarrow (1+t)^{-\alpha}$$

für $u \rightarrow \infty$. Es gilt also: gegeben, dass $X > u$, konvergiert die Verteilung von $(X - u)/u$ gegen die Verteilungsfunktion $1 - (1+t)^{-\alpha}$, $t > 0$.

In beiden Beispielen konnte die bedingte Verteilung von $X - u$ gegeben, dass $X > u$, durch eine Verteilung approximiert werden. Wir werden nun ein allgemeines Resultat formulieren, das die zwei Beispiele als Spezialfälle beinhaltet.

Definition 5.3.3. Die **verallgemeinerte Pareto-Verteilung** (GPD, Generalized Pareto Distribution) mit Index $\gamma \in \mathbb{R}$ und Skalenparameter $\sigma > 0$ ist definiert durch die Verteilungsfunktion

$$P_{\gamma,\sigma}(t) = 1 - \left(1 + \frac{\gamma t}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} t > 0, & \text{falls } \gamma > 0, \\ t \in [0, -\frac{\sigma}{\gamma}], & \text{falls } \gamma < 0. \end{cases}$$

Bemerkung 5.3.4. Für $\gamma = 0$ interpretieren wir die Formel als Grenzwert:

$$P_{0,\sigma}(t) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(1 - \left(1 + \frac{\gamma t}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right) = 1 - e^{-t/\sigma}, \quad t > 0.$$

Somit stimmt $P_{0,\sigma}$ mit der Exponentialverteilung mit Parameter $1/\sigma$ überein.

Satz 5.3.5 (Pickands–Balkema–de Haan, 1974). Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F , die im rechten Endpunkt x^* stetig ist. Dann liegt F genau dann im Max–Anziehungsbereich von $G_{\gamma,\mu,\sigma}$, wenn es eine positive messbare Funktion $\beta(u)$ gibt mit

$$\lim_{u \uparrow x^*} \sup_{t \in [0, x^* - u]} |\mathbb{P}[X - u \leq t | X > u] - P_{\gamma, \beta(u)}(t)| = 0.$$

Grob gesagt gilt die Approximation

$$\mathbb{P}[X - u \leq t | X > u] \approx P_{\gamma, \beta(u)}(t),$$

falls X im Max–Anziehungsbereich von $G_{\gamma,\mu,\sigma}$ liegt.

Nun werden wir die GP–Verteilungen in der Statistik anwenden. Es seien x_1, \dots, x_n unabhängige identisch verteilte Beobachtungen, z.B. Wasserstände an einem Deich an n Tagen. Wir interessieren uns nur für die extrem großen Beobachtungen. Das heißt, wir wählen einen Schwellenwert u und betrachten nur die Beobachtungen x_{i_1}, \dots, x_{i_k} , die u überschreiten. Wir definieren die Exzesse

$$y_1 = x_{i_1} - u, \dots, y_k = x_{i_k} - u$$

und ignorieren alle anderen Daten. Der Satz von Pickands–Balkema–de Haan macht folgendes Modell plausibel: Die Exzesse y_1, \dots, y_k sind Realisierungen von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_k , die gemäß einer verallgemeinerten Pareto–Verteilung $P_{\gamma,\beta}$ verteilt sind. Dabei sind $\gamma \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$ unbekannte Parameter. Die Dichte von $P_{\gamma,\beta}$ ist gegeben durch

$$f_{\gamma,\beta}(t) = \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\gamma t}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} \text{ mit } \begin{cases} t > 0, & \text{falls } \gamma > 0, \\ t \in [0, -\frac{\beta}{\gamma}], & \text{falls } \gamma < 0, \end{cases}$$

und $f_{0,\beta}(t) = \frac{1}{\beta} e^{-t/\beta}$, $t > 0$, für $\gamma = 0$. Damit ergibt sich für die Log–Likelihoodfunktion

$$l(\gamma, \beta) := \sum_{i=1}^k \log f_{\gamma,\beta}(y_i) = \begin{cases} -k \log \beta - \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^k \log \left(1 + \frac{\gamma y_i}{\beta}\right) & \text{für } \gamma \neq 0, \\ -k \log \beta - \sum_{i=1}^k \frac{y_i}{\beta} & \text{für } \gamma = 0. \end{cases}$$

Der ML–Schätzer

$$(\hat{\gamma}, \hat{\beta}) = \underset{\gamma, \beta}{\operatorname{argmax}} l(\gamma, \beta)$$

muss numerisch berechnet werden.

Nun werden wir für ein gegebenes kleines p die Deichhöhe Z_p schätzen, die an einem Tag mit Wahrscheinlichkeit p überflutet wird. Es sei X die Zufallsvariable, die den Wasserstand an einem Tag beschreibt. Mit Berücksichtigung des Satzes von Pickands–Balkema–de Haan gehen wir davon aus, dass für großes u :

$$\mathbb{P}[X - u > t | X > u] \approx \left(1 + \frac{\gamma t}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

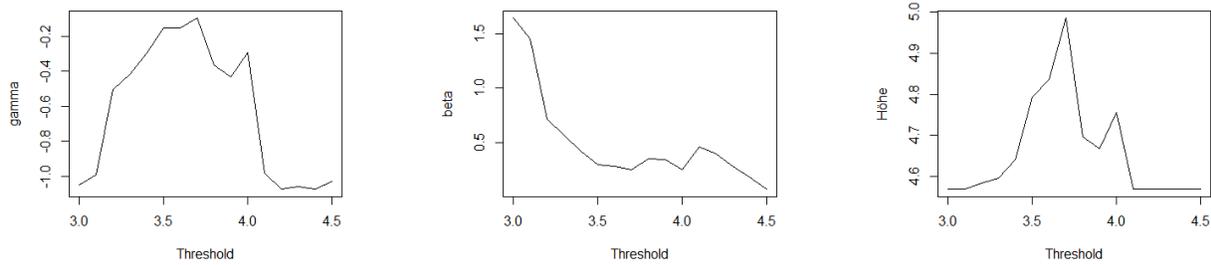


ABBILDUNG 3. Die Schätzwerte $\hat{\gamma}$ (links) und $\hat{\beta}$ (Mitte) sowie die Höhe $Z_{0,001}$ (rechts) in Abhängigkeit vom Schwellenwert u .

Mit $t = Z_p - u$ folgt also:

$$\mathbb{P}[X > Z_p] \approx \mathbb{P}[X > u] \left(1 + \gamma \frac{Z_p - u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

Nun setzen wir die rechte Seite gleich p . Wenn die Gleichung nach Z_p umgestellt wird, erhält man schließlich

$$Z_p \approx u + \frac{\beta}{\gamma} \left[\left(\frac{\mathbb{P}[X > u]}{p} \right)^\gamma - 1 \right].$$

Dabei haben wir Schätzer für β und γ bereits hergeleitet. Die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X > u]$ kann durch $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{x_i > u}$ geschätzt werden. Es ergibt sich der Schätzer

$$\hat{Z}_p = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\gamma}} \left[\left(\frac{1}{np} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{x_i > u} \right)^{\hat{\gamma}} - 1 \right].$$

Wie soll der Schwellenwert u gewählt werden?

- (1) Wird u zu groß gewählt, dann gibt nur wenige (oder überhaupt keine) Beobachtungen, die größer als u sind.
- (2) Wird u zu klein gewählt, dann greift die Asymptotik aus dem Satz von Pickands-Balkema-de Haan nicht.

Beispiel 5.3.6 (Fortsetzung von Beispiel 5.1.1). Wählen wir für die Daten aus Beispiel 5.1.1 einen Schwellenwert $u = 3, 7$, so ergeben sich Parameter-Schätzungen $\hat{\gamma} = -0,096$ und $\hat{\beta} = 0,25$ sowie Deichhöhen $Z_{0,001} = 5,0$ und $Z_0 = 6,4$.

In Abbildung 3 sind die Schätzwerte $\hat{\gamma}$ und $\hat{\beta}$ sowie die Deichhöhe $Z_{0,001}$ in Abhängigkeit vom Schwellenwert u aufgetragen. Man sieht, dass alle Werte so stark von u abhängen, dass das Verfahren als ungeeignet einzustufen ist.

Bemerkung 5.3.7. Die Höhe eines Deichs, der nur alle 10 000 Jahre überflutet wird, ist $Z_{0,0001}$, nicht $Z_{0,001}$. Um aber Änderungen an den bereits veröffentlichten Skript-Teilen zu vermeiden, wird dies nicht korrigiert.