Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

WS 2007/2008
18.10.2007

Räumliche Statistik
Übungsblatt 1

Präsentation der Lösungen: Do. 25.10.2007

Aufgabe 1 Sei $\{N_B,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Poissonsches Zählmaß mit Intensitätsmaß μ. Zeige, dass die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(N_{B_1} = k_1, \ldots, N_{B_n} = k_n \mid N_B = k)$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \mu(B) < \infty$ und für paarweise disjunkte $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$, so dass $\bigcup_{i=1}^n B_i = B$, einer Multinomialverteilung genügen, d.h., es gilt

$$\mathbb{P}(N_{B_1} = k_1, \ldots, N_{B_n} = k_n \mid N_B = k) = \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} \frac{\mu^{k_1}(B_1), \ldots, \mu^{k_n}(B_n)}{\mu^k(B)}$$

für beliebige $k_1, \ldots, k_n \geq 0$, so dass $k = k_1 + \ldots + k_n$.

Aufgabe 2 Sei $\{N_B,\; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda \in (0, \infty)$.

(a) Sei $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(W_n) \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$. Zeige, dass der erwartungstreue Schätzer

$$\hat{\lambda}_{W_n} = \frac{N_{W_n}}{\nu_d(W_n)}$$

für λ schwach konsistent ist, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) = 0.$$

(b) Zeige, dass darüber hinaus für jede solche Folge $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Zufallsvariable

$$\sqrt{\frac{|W_n|}{\lambda}} (\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda)$$

asymptotisch normalverteilt ist.

(c) Für jedes $n \geq 1$ seien die Mengen L_n, $U_n \subset \mathbb{R}^d$ jeweils die Vereinigung von endlich vielen $d-$dimensionalen Würfeln der Seitenlänge $\delta > 0$, die sich nicht überlappen. Ferner erhalte man für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen L_{n+1} und U_{n+1}, indem zu L_n bzw. U_n endlich viele dieser Würfel hinzugefügt werden. Es sei nun $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Beobachtungsfenstern, so dass $\nu_d(W_n) \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$ und zusätzlich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$L_n \subset W_n \subset U_n \text{ sowie } \lim_{n \to \infty} \frac{\nu_d(L_n)}{\nu_d(W_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\nu_d(U_n)}{\nu_d(W_n)} = 1.$$

Zeige, dass dann $\hat{\lambda}_{W_n}$ stark konsistent ist, d.h., mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt $\lim_{n\to\infty} \hat{\lambda}_{W_n} = \lambda$.

Aufgabe 3 Sei $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y-x| \le r\}$ die d-dimensionale Kugel um den Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ mit Radius $r \ge 0$. Außerdem sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda \in (0,\infty)$. Dann heißt die Funktion $H_S : [0,\infty) \longrightarrow [0,1]$ mit

$$H_S(r) = P(N_{B(o,r)} > 0)$$

die sphärische Kontaktverteilungsfunktion des Poisson-Prozesses, wogegen die Funktion $D : [0,\infty) \longrightarrow [0,1]$ mit

$$D(r) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P(N_{B(o,r)} > 1 \mid N_{B(o,\varepsilon)} > 0)$$

Nächster-Nachbar-Abstands-Verteilungsfunktion genannt wird.
Zeige, dass für jedes $r > 0$

$$H_S(r) = D(r) = 1 - \exp(-\lambda \kappa_d r^d),$$

wobei κ_d das Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel ist.