Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

WS 2007/2008
24.01.2008

Räumliche Statistik

Übungsblatt 10

Präsentation der Lösungen: 31.01.08

Aufgabe 1 Sei $\{S_n\}$ ein Poisson-Prozess auf $\mathbb{R}^d$ mit lokal endlichem Intensitätsmaß μ.

(a) Zeige, dass $\Xi = \{S_n\}$ eine zufällige abgeschlossene Menge ist.

(b) Zeige, dass Ξ genau dann stationär und isotrop ist, wenn μ ein Vielfaches des d-dimensionalen Lebesgue-Maßes $\lambda\nu_d$, $\lambda > 0$, ist.

Aufgabe 2

(a) Zeige, dass jede nichtleere stationäre zufällige abgeschlossene Menge Ξ fast sicher unbeschränkt ist.

(b) Sei Ξ eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge, so dass $T_\Xi(\{o\}) = 1$, wobei $T_\Xi(C) = P(\Xi \cap C \neq \emptyset)$ für $C \in \mathcal{C}$ das Kapazitätsfunktional bezeichnet. Zeige, dass dann $P(\Xi = \mathbb{R}^d) = 1$.

Aufgabe 3

(a) Sei μ ein lokal endliches und diffuses Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Welche zufällige abgeschlossene Menge Ξ hat das Kapazitätsfunktional $T_\Xi(K) = 1 - e^{-\mu(K)}$?

(b) Sei Y eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Berechne das Kapazitätsfunktional der zufälligen abgeschlossenen Menge $\Xi = \{x : f(x) \geq Y\}$, wobei $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ eine stetige Funktion ist.

(c) Sei N ein einfaches und lokal endliches zufälliges Zählmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
Zeige, dass die Verteilung von N vollständig durch die Leerwahrscheinlichkeiten $P(N_C = 0)$, $C \in \mathcal{C}$, bestimmt ist.

Aufgabe 4 Sei $\mathcal{C}$ der Raum der kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ und seien $C, C' \in \mathcal{C}$ nichtleer. Dann kann die Definition

$$\rho(C, C') = \min\{\varepsilon \geq 0 : C \subset C' \oplus B(0, \varepsilon) \text{ und } C' \subset C \oplus B(0, \varepsilon)\}$$

zur sogenannten Hausdorff-Metrik auf ganz $\mathcal{C}$ erweitert werden, indem

$$\rho(C, C') = \begin{cases} \infty, & \text{falls } C = \emptyset, C' \neq \emptyset \text{ oder } C' = \emptyset, C \neq \emptyset, \\ 0, & \text{falls } C = C' = \emptyset, \end{cases}$$

gesetzt wird. Man kann zeigen, dass die Spur-σ-Algebra $\sigma_\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ von $\mathcal{C}$ mit der Schnitt-σ-Algebra $\sigma_\mathcal{F}$ der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ entspricht, die von den bezüglich der Hausdorff-Metrik offenen Mengen erzeugt wird.

(a) Zeige, dass die Abbildung $conv : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $C \mapsto conv(C)$, die jedem Kompaktum seine konvexe Hülle zuordnet, stetig ist bezüglich der Hausdorff-Metrik.

(b) Seien $X_1, \ldots, X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ Zufallsvektoren.
Zeige, dass $\Xi = conv\{X_1, \ldots, X_n\}$ eine zufällige kompakte Menge ist.