Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

WS 2007/2008
05.02.2008

Räumliche Statistik

Übungsblatt 11

Präsentation der Lösungen: 14.02.08

Aufgabe 1 Sei Ξ eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge und $q(x) = P(o \in \Xi, x \in \Xi)$. Zeige, dass

$$q(-x) = q(x) = 2T_\Xi(\{o\}) - T_\Xi(\{o,x\}) \ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Aufgabe 2 Sei Ξ eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge mit $P(o \in \Xi) < 1$ und $B \in \mathcal{C}$ ein strukturierendes Element. Es gelte außerdem $P(\Xi = \emptyset) = 0$ und $B(o,\varepsilon) \subset B$ für ein $\varepsilon > 0$. Zeige, dass dann für die Kontaktverteilungsfunktion $H_B(r)$ gilt, dass $\lim_{r\to\infty} H_B(r) = 1$.

Aufgabe 3 Sei $\Xi = \cup_{n=1}^\infty(\Xi_n + S_n)$ ein Boolesches Modell, wobei das Einzelkorn Ξ_1 eine zufällige abgeschlossene Menge ist, so dass $P(\Xi \subset B(o,R)) = 1$ für eine Zufallsvariable $R : \Omega \to (0,\infty)$ mit $\mathbb{E}R^d < \infty$. Zeige, dass dann $\Xi = \cup_{n=1}^\infty(\Xi_n + S_n)$ fast sicher abgeschlossen ist.

Aufgabe 4

Sei $\Xi = \cup_{n=1}^\infty(\Xi_n + S_n)$ ein Boolesches Modell, das fast sicher abgeschlossen ist.

(a) Zeige, dass die zufällige abgeschlossene Menge Ξ stationär ist.

(b) Zeige, dass Ξ isotrop ist, wenn das Einzelkorn Ξ_1 isotrop ist.

Aufgabe 5

Sei $B \in \mathcal{C}$ ein strukturierendes Element und $\Xi = \cup_{n=1}^\infty(\Xi_n + S_n)$ ein Boolesches Modell mit Keim-Intensität λ. Zeige, dass für die Kontaktverteilungsfunktion $H_B(r)$ gilt

$$H_B(r) = 1 - \exp(-\lambda(\mathbb{E}\nu_d(\Xi_1 \oplus r\check{B}) - \mathbb{E}\nu_d(\Xi_1))) \ \ \forall r \geq 0.$$

Dabei bezeichnet $\check{B}$ das Bild von B nach Spiegelung am Ursprung. Benutze dabei (ohne Beweis), dass

- $T_\Xi(C) = 1 - \exp(-\lambda\mathbb{E}\nu_d(\Xi_1 \oplus \check{C})) \ \forall C \in \mathcal{C}$ und insbesondere
- $P(o \in \Xi) = 1 - \exp(-\lambda\mathbb{E}\nu_d(\Xi_1))$.