Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück WS 2007/2008
30.10.2007

Räumliche Statistik
Übungsblatt 2

Präsentation der Lösungen: wird noch bekannt gegeben

Aufgabe 1 Sei $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, Q)$ der kanonische Wahrscheinlichkeitsraum eines Poisson-Prozesses mit endlichem Intensitätsmaß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty)$.

(a) Sei $f : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ eine messbare Funktion. Zeige mit Hilfe von Korollar 2.1, dass

$$\int_{\mathbb{N}} f(\varphi) Q(d\varphi) = f(0) e^{-\mu(\mathbb{R}^d)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu(\mathbb{R}^d)}}{k!} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} f(\sum_{j=1}^{k} \delta_{x_j}) \mu(dx_1) \ldots \mu(dx_k).$$

(b) Zeige, dass der Strauss-Prozess auf dem Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$, wohldefiniert ist, d.h. für alle $a > 0$, $b \in [0, \infty]$ und $R > 0$ gilt

$$\int_{\mathbb{N}} a^{\varphi(W)} \exp[-b \sum_{x,y:\varphi(\{x\}),\varphi(\{y\})>0} \mathbb{1}_{W \times W}(x, y) \mathbb{1}_{(0,R)}(|x - y|)] Q(d\varphi) < \infty.$$

Aufgabe 2

(a) Seien $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Zeige, dass der homogene Poisson-Prozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensität λ_1 genau dann absolutstetig ist bezüglich des homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität λ_2, wenn $\lambda_1 = \lambda_2$.
Hinweis: Benutze die starke Konsistenz des kanonischen Intensitätsschätzers (Blatt 1, Aufg.2).

(b) Sei $\lambda_i : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ für $i = 1, 2$, so dass

$$\widetilde{\Lambda}_i(B) = \int_B \lambda_i(x) dx < \infty$$

für alle beschränkten Borelmengen $B \in \mathcal{B}_0$. Es gelte ferner, dass $\lambda_1(x) > 0$ stets $\lambda_2(x) > 0$ impliziert. Sei nun $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ ein beschränktes Beobachtungsfenster. Zeige mit Hilfe von Aufg. 1(a), dass

$$f(\varphi) = \exp(\Lambda_2(W) - \Lambda_1(W)) \prod_{x:\varphi(\{x\})>0} \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}$$

die Dichte des Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß $\Lambda_1(B) = \widetilde{\Lambda}_1(B \cap W)$ bezüglich des Poisson-Prozesses mit Intensitätsmaß $\Lambda_2(B) = \widetilde{\Lambda}_2(B \cap W)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist.