Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

WS 2007/2008
08.11.2007

Räumliche Statistik

Übungsblatt 3

Präsentation der Lösungen:
Aufg. 1 am 13.11.2007, Aufg. 2 am 22.11.2007

Aufgabe 1 Transformation gleichverteilter Zufallsvariablen

(a) Seien U_1 und U_2 unabhängige und auf dem Intervall $(0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Zeige, dass die Zufallsvariablen

$$Y_1 = \sqrt{-2\log(U_1)}\cos(2\pi U_2) \text{ und } Y_2 = \sqrt{-2\log(U_1)}\sin(2\pi U_2)$$

unabhängig und standardnormalverteilt sind.

(b) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter λ. Zeige, dass

$$Y = \max\{k \geq 0 : \ X_1 + \ldots + X_k \leq 1\}$$

eine Poisson-Verteilung mit Parameter λ hat.

Aufgabe 2

(a) Schreibe ein Programm, das die Realisierung eines homogenen Poisson-Prozesses $\{N_B : \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ mit Intensität λ auf einem rechteckigen Beobachtungsfenster $W \subset \mathbb{R}^2$ erzeugt. Benutze dazu Korollar 2.1, Aufg. 1(b) und den im Minikurs Monte-Carlo-Simulation vorgestellten Algorithmus zur Simulation exponentialverteilter Zufallsvariablen. Die Standard-Pseudo-Zufallszahlen können mit der entsprechenden Methode der verwendeten Programmiersprache erzeugt werden.

(b) Wir betrachten nun einen homogenen Poisson-Prozess $\{N_B : \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ mit Intensität $\lambda_0 = 0.001$. Generiere für die Beobachtungsfenster $W = [0, m]^2$, wobei $m = 100$, $m = 300$ und $m = 500$, jeweils 100 Realisierungen $t_1, \ldots, t_{100}$ der Testgröße

$$T = \sqrt{\frac{\nu_2(W)}{\hat{\lambda}_W}}(\hat{\lambda}_W - \lambda_0),$$

wobei $\hat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_2(W)}$. Prüfe für alle drei Werte von m mit Hilfe eines Shapiro-Wilk Tests zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob die Hypothese abzulehnen ist, dass $t_1, \ldots, t_{100}$ Realisierungen von $N(0, 1)$-verteilten Stichprobenvariablen sind.

(c) Wir betrachten einen MC-Rangtest zur Verifizierung des Hypothesenpaars

$$H_0 : \ \lambda = \lambda_0 \text{ vs. } H_1 : \ \lambda \neq \lambda_0$$

zum Niveau $\alpha = 0.05$. Der Test möge auf 100 Realisierungen $t_0, t_1, \ldots, t_{99}$ der Testgröße T beruhen. Dabei ergeben sich $t_1, \ldots, t_{99}$ aus Realisierungen eines Poisson-Prozesses mit Intensität λ_0, während sich t_0 aus einer Realisierung eines Poisson-Prozesses mit Intensität λ errechnet. Die empirische Gütefunktion $\alpha(\lambda)$ des Tests ist definiert als

$$\alpha(\lambda) = \frac{\sharp\{k : \rho_0^{(k)} > 95\}}{n},$$

wobei n die Anzahl der Testläufe und $\rho_0^{(k)}$ den Rang von t_0 im k-ten Testlauf bezeichnet.
Simuliere die Werte der empirischen Gütefunktion für $\lambda \in \{0.001, 0.002, \ldots, 0.009, 0.01\}$. Führe dabei für jeden Wert λ jeweils 100 Testläufe auf dem Fenster $W = [0, 100]^2$ durch.

(d) Wie ändern sich die Werte der empirischen Gütefunktion, wenn das Fenster $W = [0, 1000]^2$ betrachtet wird?

Für die Programmierung kann Java, C++ bzw. C oder R verwendet werden. Für den Shapiro-Wilk-Test empfiehlt es sich, Standardsoftware wie R einzusetzen.