Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

WS 2007/2008
22.11.2007

Räumliche Statistik

Übungsblatt 4

Präsentation der Lösungen: Aufg. 1-3 am 29.11.07, Aufg.4 am 04.12.07

Aufgabe 1 Überprüfe für den homogenen Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$, den Strauss-Prozess, den Strauss-Hard-Core-Prozess, den Soft-Core-Prozess und den Geyerschen Sättigungsprozess, ob die Voraussetzung der Ruelle-Stabilität aus Theorem 3.28 erfüllt ist, d.h., prüfe, ob Konstanten $p_\theta, q_\theta > 0$ existieren, so dass $f_\theta(x) \le p_\theta q_\theta^{|x|}$ für Q-fast jedes $x = \{x_1 \ldots, x_n\}$.

Aufgabe 2 Betrachte einen Gibbs-Prozess, der zu einer Exponentialfamilie gehört, d.h. die bedingte Intensität $\lambda_\theta : W \times \mathbb{N}^{(e)} \to [0,\infty)$ ist von der Form

$$\lambda_\theta(u,x) = \exp(\xi^T Z_1(u) + \zeta^T Z_2(u,x)) \; \forall u \in W, x \in \mathbb{N}^{(e)},$$

wobei $\xi \in \mathbb{R}^{m_1}$ und $\zeta \in \mathbb{R}^{m_2}$ Komponenten des Parametervektors $\theta^T = (\xi^T, \zeta^T) \in \Theta \subset \mathbb{R}^{m_1+m_2}$ sind, während $Z_1 : W \to \mathbb{R}^{m_1}$ und $Z_2 : W \to \mathbb{R}^{m_2}$ beliebige Stichprobenfunktionen sind. Zeige, dass die Dichte des Gibbs-Prozesses die Form

$$f_\theta(x) = c_\theta \exp(\zeta^T Z(x)) \prod_{i=1}^{|x|} \exp(\xi^T Z_1(x_i))$$

besitzt, wobei $Z(x) = Z_2(x_1, \emptyset) + Z_2(x_2, \{x_1\}) + \ldots + Z_2(x_n, \{x_1, \ldots, x_{n-1}\})$.

Aufgabe 3 Betrachte einen Hard-Core-Prozesses auf dem Fenster $W_n = [-n,n]^2 \subset \mathbb{R}^2$ mit Parameter $a = 1$ und $R > 0$.

(a) Zeige, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{R}_{W_n}(x)$ für den Parameter R durch

$$\hat{R}_{W_n}(x) = \min\{|x_i - x_j| : i \neq j,\, x_i, x_j \in W_n\} \mathbb{1}_{\{|x| \ge 2\}} + \mathrm{diam} W\, \mathbb{1}_{\{|x|<2\}}$$

gegeben ist.

(b) Zeige, dass $\hat{R}_{W_n}$ sowohl schwach als auch stark konsistent ist, d.h., $\hat{R}_{W_n}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit und fast sicher gegen R.

Aufgabe 4

(a) Beweise folgende Aussagen: Sei $f(\varphi)$ die Dichte eines zufälligen Zählmaßes bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes Q auf dem messbaren Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$ der Zählmaße. Sei $c > 0$ eine Konstante, so dass $f(\varphi) \le c \; \forall \varphi \in \mathbb{N}$. Seien $(U_1, N_1), (U_2, N_2), \ldots$ iid Zufallsvektoren mit unabhängigen Komponenten, wobei $U_i \sim ([0,1))$ und $N_i \sim Q$ für $i = 1, 2, \ldots$. Dann gilt

  (i) $I = \min\{k \ge 1 : \; U_k < \frac{f(N_k)}{c}\} \sim Geo(c^{-1})$ und

  (ii) $Y = N_I \sim F$.

(b) Formuliere einen Akzeptanz- und Verwerfungsalgorithmus zur Simulation eines Strauss-Prozesses, der für die Vorschlagsverteilung die Einschränkung eines homogenen Poisson-Prozesses mit geeignet gewählter Intensität auf das Beobachtungsfenster W verwendet.

Hinweis: Benutze dazu das erste Theorem aus dem Minikurs „Monte-Carlo-Simulation“im Abschnitt „Zum Umgang mit Dichten“.