Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

WS 2007/2008
29.11.2007

Räumliche Statistik

Übungsblatt 5

Präsentation der Lösungen: Dienstag 04.12.07

Aufgabe 1

(a) Gemäß Aufgabe 4 auf Übungsblatt 4 lässt sich ein Strauss-Prozess mit Parametern $a, b, R > 0$ auf einem Beobachtungsfenster W wie folgt simulieren:
Sei U_i gleichverteilt auf $[0,1)$ und N_i die Einschränkung eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität a auf W, wobei $i = 1, 2, \ldots$. Wenn nun so lange Realisierungen (u_i, x_i) unabhängiger Zufallsvektoren (U_i, N_i) erzeugt werden, deren Komponenten ebenfalls unabhängig sind, bis erstmals

$$u_i < \exp(-bt_R(x_i)),$$

dann kann man x_i als Realisierung des oben spezifizierten Strauss-Prozesses betrachten.
Implementiere den obigen Akzeptanz- und Verwerfungsalgorithmus für das Beobachtungsfenster $W = [0, m]^2$.

(b) Die empirische Nächster-Nachbar-Abstands-Verteilungsfunktion (NNAVF) $\hat{D}_x(r)$, $r > 0$ eines Punktmusters $x = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset [0, N]^2$ ist wie folgt definiert:

$$\hat{D}_x(r) = \frac{1}{\hat{\lambda}_x} \sum_{i=1}^{|x|} \frac{1}{(m - 2d(x_i, x))^2} \mathbb{1}_{\{d(x_i,x) \leq r\}} \mathbb{1}_{\{d(x_i,x) < D(x_i, \partial W)\}}.$$

Dabei bezeichnet $D(x_i, \partial W)$ den Abstand des Punktes x_i zum Rand des Beobachtungsfensters und $d(x_i, x) = \min_{j \neq i}\{\|x_i - x_j\|\}$ den Abstand von x_i zu seinem nächsten Nachbarn. Der Intensitätsschätzer $\hat{\lambda}_x$ hat die Form

$$\hat{\lambda}_x = \sum_{i=1}^{|x|} \frac{1}{(m - 2d(x_i, x))^2} \mathbb{1}_{\{d(x_i,x) < D(x_i, \partial W)\}}.$$

Implementiere den Schätzer $\hat{D}_x(r)$.

(c) Bestimme durch Simulation eine punktweise 94%-Umgebung der NNAVF eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität $\lambda = 0.25$ auf dem Beobachtungsfenster $W = [0, 20]^2$ an den Stellen $r = 0.1i$, $i = 1, \ldots, 40$. Erzeuge zu diesem Zweck 200 Realisierungen des Poisson-Prozesses, schätze die NNAVF an den genannten Stellen und wähle die Grenzen der Umgebung durch Streichen der 6 kleinsten und der 6 größten Realisierungen des Schätzers. Stelle das Resultat zusammen mit der theoretischen NNAVF $D(r) = 1 - \exp(-\lambda\pi r^2)$ des homogenen Poisson-Prozesses graphisch dar.

(d) Bestimme durch Mittelung über jeweils 30 Simulationen die empirischen NNAVF eines Strauss-Prozesses mit den Parametern $a = 0.25$, $R = 2$ und $b = 0.0025i$, $i = 0, \ldots, 7$ auf dem Beobachtungsfenster $W = [0, 20]^2$. Visualisiere die Resultate zusammen mit dem Konfidenzband aus (c).

Auf der Homepage der Vorlesung befindet sich eine Datei mit R-Code, der für die Visualisierung nützlich sein kann.