Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

WS 2007/2008
06.12.2007

Räumliche Statistik

Übungsblatt 6

Präsentation der Lösungen: 13.12.07

Aufgabe 1

Erzeuge für die Beobachtungsfenster $[0,m]^2$, $m = 10, 15, 20, 25$ mit dem R-Paket Spatstat jeweils 30 Realisierungen eines Strauss-Prozesses mit Parametern $R = 1.5$, $\beta = 2$ und $\gamma = 0.5$. Die Parameterangaben beziehen sich auf die in Spatstat verwendete Definition des Strauss-Prozesses, d.h. $\beta = a$ und $\gamma = \exp(-b)$, wenn a und b die Parameter der in der Vorlesung verwendeten Darstellung der Dichte sind. Berechne jeweils den Maximum-Pseudolikelihood-Schätzer für die Parameter β und γ und visualisiere die Mittelwerte und die empirischen Schätzvarianzen in Abhängigkeit von der Fenstergröße m.
Hinweis: Spatstat lässt sich mit dem Befehl install.packages("spatstat") installieren. Für die Simulationen benötigt man die Prozedur rmh und für das Modelfitting die Funktion ppm. Sei fit das Objekt mit dem Ergebnis von ppm, dann bekommt man die Werte für γ und β über summary(fit)[13]$interaction[5]$sensible$printable bzw. summary(fit)[18]$trend$value.

Aufgabe 2

(a) Man sagt, dass die Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_n$ zu einer einparametrischen Exponentialfamilie gehören, wenn ihre Dichten bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktionen von der Form
$$f(y, \theta_i) = \exp(\frac{1}{\tau^2}((y\theta_i) + a(y,\tau) - b(\theta_i))) \ \forall y \in \mathbb{R}$$
bzw.
$$P_{\theta_i}(Y_i = y) = \exp(\frac{1}{\tau^2}((y\theta_i) + a(y,\tau) - b(\theta_i))) \ \forall y \in C$$
sind, wobei $C \subset$ die kleinste abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, so dass $P_{\theta_i}(Y_i) = 1$ gilt , während $a : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $b : \Theta \to \mathbb{R}$. Stelle die gewichtete Loglikelihoodfunktion der Zufallsstichprobe $(Y_1, \dots, Y_n)$ auf unter der Bedingung, dass Y_i für alle i zu einer Exponentialfamilie gehört. Die Gewichtsfunktion sei dabei ein beliebiger Vektor $w = (w_1, \dots, w_n)$. Konkretisiere die Formel für den Fall $Y_i \sim Poi(\lambda_i)$.

(b) Wir nehmen nun an, dass die Erwartungswerte $\mathbb{E}Y_i = \lambda_i$, $i = 1, \dots, n$ der Poisson-verteilten Stichprobenvariablen Y_i über die Linkfunktion $g(x) = \log(x)$ derart durch die Komponenten eines Vektors $\mathbf{X}\beta$ ausgedrückt werden können, dass $(g(\mathbb{E}Y_1), \dots, g(\mathbb{E}Y_n))^T = \mathbf{X}\beta$, wobei die Designmatrix $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

   (i) Welche Form hat in diesem Fall die Loglikelihoodfunktion zur Bestimmung eines ML-Schätzers für β ?

   (ii) Wie ist die Designmatrix $\mathbf{X}$ zu wählen, damit der ML-Schätzer für β im oben spezifizierten Modell einen ML-Schätzer für die Parameter $a > 0$ und $b > 0$ eines Strauss-Prozesses mit Interaktionsradius $R > 0$ ergibt?

(c) Wiederhole Aufgabe 1 und schätze die Parameter β und γ zusätzlich direkt mit Hilfe eines verallgemeinerten linearen Modells (Funktion glm) mit den Gewichten

$w = (m^2/k, \ldots, m^2/k)$, wobei k die Anzahl der Quadraturpunkte ist, und vergleiche die Ergebnisse.
Hinweis: Die Verteilung der Y_i und die Linkfunktion kann in der Prozedur glm über den Parameter family spezifiziert werden. Bei einem Objekt points des Typs ppp (planar point pattern) sind in points$x bzw. points$y die Koordinaten der Punkte gespeichert.

Aufgabe 3 Sei $X_0, X_1, \ldots$ eine Markov-Kette auf $\mathbb{N}^{(e)}$ mit dem Übergangskern $\mathbf{P}$, so dass es für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(\mathbf{e})}$ eine natürlich Zahl $n \geq 1$ gibt mit

$$\mathbf{P}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}, \{\emptyset\}) > \mathbf{0},$$

wobei die leere Menge $\emptyset$ dem Nullmaß $\varphi_0 : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty)$ mit $\varphi_0(\mathbb{R}^d) = 0$ entspricht. Zeige, dass

(i) $\{X_n\}$ η-irreduzibel ist, wobei $\eta = \delta_\emptyset$,

(ii) und dass $\{X_n\}$ darüber hinaus aperiodisch ist, wenn $\mathbf{P}(\emptyset, \{\emptyset\}) > 0$.