Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

WS 2007/2008
13.12.2007

Räumliche Statistik

Übungsblatt 7

Präsentation der Lösungen: 20.12.07

Aufgabe 1

Sei $(D, \mathcal{D})$ ein beliebiger messbarer Raum und sei $Z_1, Z_2, \ldots : \Omega \to D$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen über $(D, \mathcal{D})$. Außerdem sei $X_0 : \Omega \to \mathbb{N}^{(e)}$ eine Zufallsvariable, die von $Z_1, Z_2, \ldots$ unabhängig ist, und $\phi : \mathbb{N}^{(e)} \times D \to \mathbb{N}^{(e)}$ sei eine beliebige messbare Funktion.
Zeige, dass dann $X_0, X_1, \ldots : \Omega \to \mathbb{N}^{(e)}$ mit

$$X_n = \phi(X_{n-1}, Z_n) \ \forall n \geq 1$$

eine Markov-Kette ist, deren Übergangskern $\mathbf{P} : \mathbb{N}^{(e)} \times \mathcal{N}^{(e)} \to [0,1]$ gegeben ist durch

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, A) = P(\omega \in \Omega : \ \phi(\mathbf{x}, Z_1(\omega)) \in A) \ \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}, A \in \mathcal{N}^{(e)}.$$

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{P} : \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ ein Übergangskern einer Markov-Kette von reellwertigen Zufallsvariablen und $X_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebige reellwertige Zufallsvariable. Zeige, dass es eine von X_0 unabhängige Folge $Z_1, Z_2, \ldots$ von reellwertigen unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen sowie eine Update-Funktion $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$X_n = \phi(X_{n-1}, Z_n) \ \forall n \geq 1$$

eine Markovkette $X_0, X_1, \ldots$ mit dem Übergangskern $\mathbf{P}$ definiert.

Aufgabe 3

(a) Sei Π die Grenzverteilung einer ergodischen Markov-Kette auf dem Zustandsraum $\mathbb{N}^{(e)}$. Zeige, dass Π dann eine stationäre Anfangsverteilung ist.

(b) Sei α stationäre Anfangsverteilung einer Markov-Kette mit Übergangskern $\mathbf{P}$ auf dem Zustandsraum $\mathbb{N}^{(e)}$. Zeige, dass dann

$$\alpha(A) = \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \mathbf{P}^{(n)}(y, A)\alpha(dy) \ \forall n \geq 1, \ A \in \mathcal{N}^{(e)}.$$

(c) Zeige, dass die Grenzverteilung einer ergodischen Markovkette ihre einzige stationäre Anfangsverteilung ist.