Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

WS 2007/2008
20.12.2007

Räumliche Statistik

Übungsblatt 8

Präsentation der Lösungen: 17.01.07

Aufgabe 1

(a) Implementiere den in der Vorlesung diskutieten Metropolis-Hastings-Algorithmus zur Simulation eines Gibbs-Prozesses auf einem Beobachtungsfenster $W = [0, m]^2$. Der Prozedur sollen als Parameter die Geburtswahrscheinlichkeit p, eine beliebige nicht normalisierte Dichte $g : \mathbb{N}^{(e)} \to \mathbb{R}$ und die Anzahl der Iterationen übergeben werden. Als Startkonfiuration soll die Prozedur das Nullmaß und die Realisierung eines homogenen Poisson-Prozesses auf W mit vorgegebener Intensität verwenden können.

(b) Erweitere das Programm aus (a), so dass ein Strauss-Prozess mit Parametern $a, b, R > 0$ und ein Hard-Core-Prozess mit Hard-Core-Radius $R > 0$ und Parameter $a > 0$ simuliert werden können.

(c) Füge in das Programm eine Prozedur zur Berechnung der empirischen Nächster-Nachbar-Abstands-Verteilungsfunktion (NNAVF) $\hat{D}_x(r)$, $r > 0$ ein (siehe Blatt 5). Für ein Punktmuster $x = \{x_1, \dots, x_n\} \subset W$ ist diese wie folgt definiert:

$$\hat{D}_x(r) = \frac{1}{\hat{\lambda}_x} \sum_{i=1}^{|x|} \frac{1}{(m - 2d(x_i, x))^2} \mathbb{I}_{\{d(x_i,x) \le r\}} \mathbb{I}_{\{d(x_i,x) < D(x_i, \partial W)\}}.$$

Dabei bezeichnet $D(x_i, \partial W)$ den Abstand des Punktes x_i zum Rand des Beobachtungsfensters und $d(x_i, x) = \min_{j \neq i}\{\|x_i - x_j\|\}$ den Abstand von x_i zu seinem nächsten Nachbarn. Der Intensitätsschätzer $\hat{\lambda}_x$ hat die Form

$$\hat{\lambda}_x = \sum_{i=1}^{|x|} \frac{1}{(m - 2d(x_i, x))^2} \mathbb{I}_{\{d(x_i,x) < D(x_i, \partial W)\}}.$$

(d) Die Prozedur aus (a) soll nun während der Simulation alle 10 Schritte

- an vorgegebenen Stellen $(r_1, \dots, r_n)$ die NNAVF schätzen,
- die Anzahl der Punkte protokollieren und
- im Falle der Simulation des Hard-Core-Prozesses den ML-Schätzer

$$\widehat{R}(x) = \min_{i \neq j}\{\|x_i - x_j\|\} \mathbb{I}_{\{|x| \ge 2\}} + \mathrm{diam} W \, \mathbb{I}_{\{|x| < 2\}}$$

berechnen.

Die Ergebnisse sollen im Anschluss als Funktionen der Anzahl der Schritte visualisiert werden können.

(e) Simuliere einen Strauss-Prozess mit den Parametern $a = 2$, $b = 0.7$ und $R = 2$, sowie einen Hard-Core-Prozess mit Hard-Core-Radius $R = 1$ und Parameter $a = 1$ auf dem Beobachtungsfenster $W = [0, 20]^2$. Verwende als Startkonfiguration die Realisierung eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität 2, die Geburtswahrscheinlichkeit $p = 0.5$ und führe 4000 Iterationen durch. Visualisiere gemäß

Teil (d) die zeitliche Entwicklung der dort genannten Charakteristika, wobei die NNAVF für $r \in \{0.5, 1, 1.5\}$ geschätzt werden soll.

(f) Wie ändert sich die zeitliche Entwicklung der Charakteristika aus (d), wenn das Nullmaß als Startkonfiguration verwendet wird?