Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

WS 2007/2008
17.01.2008

Räumliche Statistik

Übungsblatt 9

Präsentation der Lösungen: 24.01.08

Aufgabe 1

(a) Implementiere in `R` eine Prozedur, die, ausgehend von einem gegebenen Punktmuster, eine vorgegebene Anzahl von Schritten des Metropolis-Hastings-Algorithmus zur Simulation eines Strauss-Prozesses mit Parametern $a, b, R > 0$ ausführt. Der Rückgabewert soll der letzte Zustand der Markov-Kette sein.

(b) Implementiere eine Funktion, die für die Input-Parameter a, a_0, b, b_0, ein Punktmuster x und eine Matrix

$$\begin{pmatrix} |y_1| & |y_2| & \dots & |y_n| \\ t_R(y_1) & t_R(y_2) & \dots & t_R(y_n) \end{pmatrix}$$

die Approximation

$$\begin{aligned} \log LQ_n(x,(a,b)) &= ((\log a, -b) - (\log a_0, -b_0))(\begin{pmatrix} |x| \\ t_R(x) \end{pmatrix} - \overline{S}_n) \\ &- \log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \exp[((\log a, -b) - (\log a_0, -b_0))(\begin{pmatrix} |y_i| \\ t_R(y_i) \end{pmatrix} - \overline{S}_n)]\right) \end{aligned}$$

des Log-Likelihood-Quotienten $\log LQ(x,(a,b))$ des Strauss-Prozesses für ein festes $R > 0$ berechnet. Der Term $\overline{S}_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i|, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_R(y_i)\right)^T$ wird dabei als „nahrhafte Null" eingefügt, um die Berechnungen numerisch zu stabilisieren.

(c) Schreibe eine Prozedur, die für ein gegebenes Punktmuster x auf dem rechteckigen Beobachtungsfenster $[0, m_1] \times [0, m_2]$ einen Monte-Carlo-ML-Schätzer für den Parametervektor $(a, b)^T$ des Strauss-Prozesses bei gegebenem Interaktionsradius $R > 0$ und Referenzvektor $(a_0, b_0)^T$ berechnet. Das ergodische Mittel in der Formel für $\log LQ_n(x,(a,b))$ soll dabei nur unter Berücksichtigung derjenigen Zustände y_i der Markov-Kette ermittelt werden, die nach einem „Burn-in" von 500 Schritten auftreten. Das Maximierungsproblem kann mit Hilfe der `R`-Funktion nlm gelöst werden. Als Startwerte können die Referenzparameter a_0, b_0 verwendet werden. Beachte, dass nlm die übergebene Funktion minimiert.

(d) Auf der Homepage der Vorlesung befindet sich ein Datensatz, der eine Realisierung eines Strauss-Prozesses mit Interaktionsradius $R = 2$ auf dem Fenster $W = [0, 20]^2$ darstellt. Die erste Zeile der Datei enthält die x-Koordinaten und die zweite die y-Koordinaten der Punkte. Bestimme mit Hilfe von `spatstat` einen Maximum-Pseudo-Likelihood-Schätzer für $(a, b)^T$.

(e) Benutze den Pseudo-Likelihood-Schätzer aus Teil (d) als Referenzvektor $(a_0, b_0)^T$ für die Berechnung eines Monte-Carlo ML-Schätzers.

- Führe dazu das Programm aus Teil (c) zunächst einige Male für $n = 500$ aus und vergleiche die Ergebnisse.
- Berechne den Schätzer dann unter Verwendung von $n = 10000$ Schritten der Markov-Kette. Dies kann einige Zeit dauern!

- Untersuche, wie sich der Schätzer ändert, wenn die Berechnung für $n = 10000$ 3 Mal iteriert wird, wobei als Referenzvektor $(a_0, b_0)^T$ jeweils das Ergebnis des vorhergehenden Schrittes verwendet wird.