

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 1

(Abgabe: Donnerstag, 25.10.2007, vor den Übungen)

Bitte Übungsblätter zu zweit abgeben. Es ist eine Anmeldung bei SLC notwendig.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Ein zufälliger Versuch bestehe im Ausfüllen eines Fragebogens mit 4 Alternativfragen durch eine zufällig ausgewählte Versuchsperson. Es bezeichne A_k das Ereignis, dass die Frage k mit 'ja' beantwortet wird ($k = 1, 2, 3, 4$).

- (a) Drücke die zufälligen Ereignisse

A : "Es wird jede Frage mit 'ja' beantwortet."

B : "Es wird keine Frage mit 'ja' beantwortet."

C : "Es wird genau 1 Frage mit 'nein' beantwortet."

D : "Es wird mindestens 1 Frage mit 'ja' beantwortet."

E : "Es werden genau 2 Fragen mit 'ja' beantwortet."

mit Hilfe der Ereignisse A_k und geeigneter Mengenoperationen aus.

(2,5)

- (b) Überlege, wie der zugeordnete Stichprobenraum Ω definiert werden kann und gebe die den zufälligen Ereignissen A_1, A, B, C, D und E entsprechenden Teilmengen von Ω an.

(3,5)

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei Ω eine Menge, \mathcal{F} eine σ -Algebra über Ω und $C \in \mathcal{F}$.

Zeige, dass $\mathcal{F}_C = \{C \cap A : A \in \mathcal{F}\}$ eine σ -Algebra über C ist.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

- (a) Sei Ω eine überabzählbare Menge und

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ höchstens abzählbar oder } A^C \text{ höchstens abzählbar}\}$$

Für $A \in \mathcal{F}$ sei

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ höchstens abzählbar,} \\ 1, & A^C \text{ höchstens abzählbar.} \end{cases}$$

Zeige:

\mathcal{F} ist eine σ -Algebra über Ω und \mathbb{P} ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{F} . (8)

- (b) Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{M \subseteq \Omega \mid M \text{ offen oder abgeschlossen}\}$.

Ist \mathcal{F} eine σ -Algebra?

(1)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und seien A, B und C paarweise disjunkte Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 0.4$, $\mathbb{P}(B) = 0.25$ und $\mathbb{P}(C) = 0.35$. Bestimme die durch $\{A, B, C\}$ erzeugte σ -Algebra, d. h. die kleinste σ -Algebra, die A, B und C enthält. Berechne die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse dieser σ -Algebra.