Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 10

(Abgabe: Donnerstag, 17.1.2008, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Seien X und Y quadratisch integrierbare Zufallsvariablen, d.h. $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ und $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$. Zeige:

(a) Falls X und Y identisch verteilt sind, dann sind $U = X - Y$ und $V = X + Y$ unkorreliert. (2)

(b) Sind X und Y unabhängig und identisch $\text{Bin}(1, p)$-verteilt für ein $p \in (0, 1)$, dann sind U und V dennoch nicht unabhängig. (3)

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Bei einer Folge von Würfen mit einem idealen Würfel beschreibe Y_n die nach dem n-ten Wurf erreichte durchschnittliche Augenzahl. Schätze die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\left(\left|Y_n - \frac{7}{2}\right| \geq \varepsilon\right)$$

mit der Ungleichung von Tschebyschev nach oben ab.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Zeige folgende Ungleichung:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > \varepsilon) \leq \frac{2\text{Var}(X)}{\varepsilon^2 + \text{Var}(X)} \quad \forall \varepsilon > 0$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es gelte $X \sim \text{Poi}(\lambda), \lambda > 0$. Zeige:

$$\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Berechne die charakteristische Funktion, den Erwartungswert und die Varianz der Verteilung einer Zufallsvariablen X mit Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Hinweis zu Aufgabe 1:

Eine Menge $\mathcal{X}$ von reellen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ heißt *identisch verteilt*, wenn $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ für alle $X, Y \in \mathcal{X}$ gilt.