Prof. Dr. E. Spodarev / W. Karcher WS 2007/08

17.1.2007

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 11

(Abgabe: Donnerstag, 24.1.2007, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es sei X_1, X_2,... eine Folge von unabhängigen und identisch Poisson-verteilten Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda = 400$. Wie groß muss $n \in \mathbb{N}$ mindestens sein, damit das arithmetische Mittel $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99 im Intervall $[390, 410]$ liegt? Berechne dazu eine Abschätzung mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschev.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige und identisch verteilte ganzzahlige Zufallsvariablen. Ferner sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_j$.

(a) Zeige: $\mathbb{P}(X_k = m) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-imt}\varphi_{X_k}(t)dt \quad k = 1, ..., n, \quad m \in \mathbb{Z}$

Hinweis: $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{itj}e^{itk}dt = \begin{cases} 2\pi, & j+k=0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ (2)

(b) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}[\varphi_{X_1}(t)]^n dt$$

(2)

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Berechne die charakteristische Funktion von X, falls X gleichverteilt ist im Intervall $[-a, a]$, $a > 0$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sei $X_1, X_2, ...$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$, sowie $N \sim \text{Poi}(\lambda)$ eine Poisson-verteilte und von $\{X_i, i \geq 1\}$ unabhängige Zufallsgröße. Außerdem sei $Z := \sum_{i=1}^N X_i$.

(a) Zeige: $\varphi_Z(t) = e^{\lambda(\varphi_{X_1}(t)-1)}, \quad t\in\mathbb{R}$

Hinweis:
$\mathbb{E}\left(e^{it\sum_{i=1}^N X_i}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(e^{it\sum_{i=1}^N X_i}\,\middle|\, N=n\right)\mathbb{P}(N=n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(e^{it\sum_{i=1}^n X_i}\right)\mathbb{P}(N=n)$ (3)

(b) Verwende Teil (a), um sowohl $\mathbb{E}Z$ als auch $\text{Var}(Z)$ durch λ und entsprechende Momente der Zufallsgrößen X_i auszudrücken. (3)

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Berechne die charakteristische Funktion $\varphi_{(X_1,X_2)}$, falls (X_1, X_2) bivariat normalverteilt ist mit $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = 0$.