Prof. Dr. E. Spodarev / W. Karcher WS 2007/08
24.1.2008

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 12

(Abgabe: Donnerstag, 31.1.2008, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Berechne die erzeugende Funktion der geometrischen Verteilung und mit deren Hilfe den zugehörigen Erwartungswert und die zugehörige Varianz.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$.

(a) Zeige: $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$ (Hinweis: $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \mathbb{E}\left(\int\limits_0^1 t^X dt\right)$) (3)

(b) Bestimme den Grenzwert von $\frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$, falls $n \to \infty$, $p \to 0$ und $np \to \lambda$. (1)

Aufgabe 3 (6 Punkte)

(a) Sei X eine absolutstetige Zufallsvariable mit momenterzeugender Funktion $M_X(t)$. Zeige:
$$\mathbb{E}X^n = M_X^{(n)}(0) := \frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\Big|_{t=0}$$
(4)

(b) Berechne die momenterzeugende Funktion von $X \sim \mathrm{Gamma}(b,p)$.
(Dichte der Gammaverteilung: vgl. Blatt 7, Aufgabe 4) (2)

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Die Zufallsvariable X besitze die momenterzeugende Funktion $M_X(t)$ für $|t| < h$ mit einem $h > 0$. Mit $\xi_X(t)$ sei die sogenannte *kumulantenerzeugende Funktion*
$$\xi_X(t) := \log M_X(t)$$
bezeichnet.

(a) Zeige: $\mathbb{E}X = \xi_X'(0)$ und $\mathrm{Var}(X) = \xi_X''(0)$ (2)

(b) Berechne unter Verwendung der kumulantenerzeugenden Funktion $\mathbb{E}X$ und $\mathrm{Var}(X)$ für $X \sim \mathrm{Gamma}(b,p)$. (2)

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathcal{B}(0,1), \mathbb{P})$, wobei $\mathbb{P}$ das Lebesguemaß auf $[0,1]$ sei. Zeige:

(a) Die Folge $X_n = n \cdot \mathbb{1}_{(0,1/n)}$ konvergiert fast sicher gegen 0, jedoch nicht im Mittel. (2)

(b) Die Folge $X_n = \sqrt{n} \cdot \mathbb{1}_{(0,1/n)}$ konvergiert fast sicher gegen 0 und im Mittel, jedoch nicht im quadratischen Mittel. (2)

(c) Falls $X_n \sim U([\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}])$ und $X \equiv \frac{1}{2}$, so gilt $X_n \xrightarrow{d} X$. (2)

Hinweis zu Aufgabe 5:

Mit Konvergenz im Mittel bzw. im quadratischen Mittel ist die L^1– bzw. L^2–Konvergenz gemeint.