Prof. Dr. E. Spodarev / W. Karcher

WS 2007/08
31.1.2008

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 13

(Abgabe: Donnerstag, 7.2.2008, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es sei X_1, X_2,... eine Folge von unabhängigen und identisch Poisson-verteilten Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda = 400$. Wie groß muss $n \in \mathbb{N}$ mindestens sein, damit das arithmetische Mittel $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99 im Intervall $[390, 410]$ liegt? Berechne dazu eine Näherungslösung mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes. (Bem.: $\Phi^{-1}(0.995) \approx 2.576$)

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(a) Bestimme die Verteilung von $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, wenn $X_1, ..., X_n$ unabhängige und identisch Poisson-verteilte Zufallsvariablen sind. (2)

(b) Betrachte die Folge $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ von Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathrm{Poi}(n\lambda)$. Zeige unter Verwendung des zentralen Grenzwertsatzes, dass gilt:

$$\tfrac{X_n - n\lambda}{\sqrt{X_n}} \xrightarrow{d} X \quad \text{mit } X \sim N(0,1) \tag{3}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $X_1, X_2, ...$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit Verteilung

(a) $X_k \sim \mathrm{B}(1, p_k), \quad 0 < p_k < 1, \quad k \in \mathbb{N},$ (2)

(b) $\mathbb{P}(X_k = \pm k^\lambda) = \frac{1}{2}, \quad \lambda < \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.$ (2)

Überprüfe, ob das starke Gesetz der großen Zahlen gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $\{X_n, n \geq 2\}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n\log(n)}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log(n)}$$

Genügt die Folge dem schwachen Gesetz der großen Zahlen?

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Es sei $X_n, n \in \mathbb{N}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen. Weise nach, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n}\log(n)} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} 0,$$

falls $\mathbb{E}X_1 = 0$ und $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ gilt.

Hinweis (Zentraler Grenzwertsatz):

Sei $X_1, X_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$ und $\mathrm{Var}X_i > 0$ für alle $i = 1, 2, ...; \mu = \mathbb{E}X_i$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}X_i$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + ... + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x),$$

wobei $\Phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.